

**Tomada de decisão multicritério sob condições de
incerteza e suas aplicações**

**Tomada de decisão multicritério sob condições de
incerteza e suas aplicações**

Petr Iakovlevitch Ekel
Matheus Pereira Libório
Organizadores

Belo Horizonte
Editora PUC Minas
2025

© Os organizadores

Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

Grão-Chanceler: Dom Walmor Oliveira de Azevedo

Reitor: Prof. Dr. Pe. Luís Henrique Eloy e Silva

Pró-reitor de Pesquisa e de Pós-graduação: Martinho Campolina Rebello Horta

Editora PUC Minas

Direção e coordenação editorial: Mariana Teixeira de Carvalho

Comercial: Daniela Figueiredo Andrade Albergaria

Revisão e normalização: Patrícia Falcão, Fabiana Marques, Thúllio Salgado

Conselho editorial: Alberico Alves da Silva Filho, Álisson da Silva Costa, Conrado Moreira Mendes, Édil Carvalho Guedes Filho, Ev'Ângela Batista Rodrigues de Barros, Flávio de Jesus Resende, Javier Alberto Vadell, Leonardo César Souza Ramos, Martinho Campolina Rebello Horta, Mônica Eulália da Silva Januzzi, Pedro Paiva Brito, Robson Figueiredo Brito, Rodrigo Coppe Caldeira, Rodrigo Villamarim Soares.

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Biblioteca da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

T655 Tomada de decisão multicritério sob condições de incerteza e suas aplicações / organizadores Petr Iakovlevitch Ekel, Matheus Pereira Libório. Belo Horizonte: Editora PUC Minas, 2025.

256 p. : il.

ISBN: 978-65-88547-79-3

1. Tomada de decisão com múltiplos critérios. 2. Conjuntos Fuzzy. 3. Incerteza (Teoria da informação). 4. Processo decisório. 5. Sistemas de suporte de decisão. I. Ekel, Petr Iakovlevitch. II. Libório, Matheus Pereira. III. Título.

CDU: 517.11

Ficha catalográfica elaborada por Fabiana Marques de Souza e Silva - CRB 6/2086

Editora PUC Minas

Rua Dom José Gaspar, 500 – Coração Eucarístico

CEP: 30535-901

Belo Horizonte – Minas Gerais

Reconhecimento:

Os textos apresentados aqui resultam de pesquisas apoiadas pela Vale S.A. no âmbito do Acordo de Parceria para Pesquisa, Desenvolvimento e Inovação.



Sumário

Apresentação	9
Sobre a tomada de decisão multicritério em condições de incerteza . . .	15
Tomada de decisão multiobjetivo e multiatributo em um ambiente fuzzy e suas aplicações em engenharia de potência	43
Tomada de decisão multicritério em condições de incerteza na aplicação de alocação multiobjetiva de recursos	79
Construção de cenários para análise multicritério em condições de incerteza com base em informações quantitativas e qualitativas usando a decisão de grupo	117
Tomada de decisão multiatributo para processamento da informação qualitativa aplicada à prospecção de alternativas locais para a geração de energia renovável	151
Tomada de decisões espaciais sob incertezas para apoiar a prospecção de locais para sistemas híbridos de geração de energia renovável	179
Avaliação do risco operacional em subestações de energia elétrica e sua redução racional com base na alocação multicritério de recursos	213
O conhecimento dos especialistas e o estresse cognitivo de avaliar muitas alternativas são importantes: uma nova perspectiva sobre o problema da inconsistência em comparações entre pares	237
Sobre os autores	251

Apresentação

Os resultados das nossas pesquisas dos últimos anos permitem falar sobre a criação da teoria de tomada de decisão multicritério sob condições de incerteza, baseada na abordagem possibilística e implementada usando a teoria de conjuntos *fuzzy* e sua combinação com outros ramos da matemática de incerteza. Caracterizando essa teoria, é necessário indicar os seguintes pontos de partida:

- É impossível falar sobre o futuro, planejar o futuro com base nas tendências do passado. Portanto, não usamos uma abordagem probabilística. Utilizamos uma abordagem possibilística, tentando agregar informações de caráter formal e de caráter informal de diferentes fontes, informações de caráter quantitativo e de caráter qualitativo. Essa agregação permite construir estados de natureza, combinações representativas de dados iniciais ou cenários.
- Em condições de incerteza, soluções ótimas não existem. Uma solução ótima para um cenário não é ótima para outro. Assim, o que significa a solução nas condições de incerteza? As chamadas soluções robustas (não dominadas) podem servir como tais soluções. Uma solução robusta é aquela que, no mais alto grau, permite satisfazer qualquer cenário.
- Todos os métodos e estratégias da pesquisa operacional baseiam-se no conceito da existência de soluções ótimas e buscam essas soluções, que não existem. Considerando isso, não procuramos as melhores soluções, mas as piores, que são dominadas por outras soluções, aplicando qualquer tipo de informação, qualquer tipo de preferências. Cortando as soluções dominadas, reduzimos sistematicamente as regiões de incerteza de soluções.

Os resultados obtidos permitem:

- processar informações quantitativas (incluindo dados georreferenciados) com diferentes níveis de incerteza;
- processar informações qualitativas, baseadas em conhecimento, experiência e intuição dos especialistas envolvidos;
- converter diferentes formatos de preferências em informações homogêneas para tomada de decisões em ambiente *fuzzy*;
- produzir decisões multicritério com a regulação dos níveis de compensação mútua entre objetivos ou atributos, refletindo níveis de tolerância do tomador de decisões ao risco;
- construir cenários com a aplicação direta de informações qualitativas em conjunto com informações quantitativas, realizando um processo de fusão de informações dentro de modelos multiobjetivo;

- avaliar as consequências das decisões tomadas, incluindo os seus riscos, e produzir soluções robustas (não dominadas) multicritério;
- construir e aplicar esquemas de tomada de decisão multicritério (individual e em grupo) em condições de incerteza, permitindo múltiplas sessões de utilização de informação de caráter qualitativo.

Levando o exposto em consideração, os oito capítulos do presente livro, baseados nas correspondentes publicações em inglês, refletem os aspectos metodológicos da teoria de tomada de decisão multicritério sob condições de incerteza baseada na abordagem possibilística, e questões das suas aplicações práticas para a análise dos problemas das diferentes áreas.

Embora o oitavo capítulo não seja diretamente dedicado à tomada de decisão multicritério em condições de incerteza, ele aborda aspectos importantes das comparações de alternativas em pares. Melhorar a qualidade das comparações em pares serve para preparar informações preferenciais adequadas para a tomada de decisões.

Os resultados apresentados foram obtidos pelos pesquisadores da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais com participação de professores do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Universidade Estadual de Montes Claros, Faculdade Ibmecc do Rio de Janeiro, Universidade Federal de Pernambuco, Universidade Federal de Minas Gerais com suporte da Vale S.A., CNPq, CAPES e FAPEMIG.

O capítulo **“Sobre a tomada de decisão multicritério em condições de incerteza”** tem um caráter fundamental para a construção das soluções multicritério robustas. A principal contribuição do capítulo é a consideração dos critérios de escolha da abordagem clássica para lidar com a incerteza da informação na tomada de decisão monocritério como funções objetivo no âmbito de modelos multiobjetivos, cuja análise gera soluções harmoniosas. São apresentados detalhes do uso de um esquema geral de tomada de decisão multicritério sob incerteza. Esse esquema concentra-se no uso da informação quantitativa disponível ao mais alto grau para reduzir regiões de incerteza de decisão. Contudo, se a capacidade resolutiva de problemas relativos ao processamento de informação quantitativa não permite obter soluções únicas, o esquema geral pressupõe a utilização de informação qualitativa baseada no conhecimento, experiência e intuição dos especialistas envolvidos no processo de tomada de decisão.

O capítulo **“Tomada de decisão multiobjetivo e multiatributo em um ambiente *fuzzy* e suas aplicações em engenharia de potência”** apresenta e generaliza a experiência dos autores no uso da teoria dos conjuntos *fuzzy*, incluindo sua combinação com outro ramo da matemática da incerteza, no desenvolvimento de abordagens e métodos gerais para otimização e tomada de decisão considerando fatores da incerteza e multicritério em problemas de projeto, planejamento, operação e controle de sistemas complexos. São identificadas duas classes de situações que requerem o uso de uma abordagem multicritério. Em particular, são consideradas duas classes de modelos relacionados a problemas multiobjetivos (modelos $\langle X, F \rangle$) e multiatributos (modelos $\langle X, R \rangle$), respectivamente. São considerados métodos para sua análise baseados na modificação da abordagem Bellman-Zadeh para tomada de decisão em um ambiente *fuzzy*

e técnicas de modelagem de preferências *fuzzy*, respectivamente. Embora o uso desses modelos tenha um caráter independente, eles também servem como partes de um esquema geral para tomada de decisão multicritério sob condições de incerteza. É descrita a experiência dos autores na utilização dos resultados indicados acima para resolver diversas classes de problemas de planejamento e operação de sistemas de potência.

O capítulo **“Tomada de decisão multicritério em condições de incerteza na aplicação de alocação multiobjetivo de recursos”** preocupa-se com uma alocação multiobjetivo de recursos (ou da escassez de recursos), dando uma resposta à questão fundamental “Como fazer?”, recorrente em diferentes tipos de atividades de planejamento (planejamento estratégico, de inovação, novos negócios, pesquisa e desenvolvimento, expansão, manutenção etc.). A solução do problema está associada à extensão do esquema geral de tomada de decisão multicritério sob incerteza. Esse esquema é baseado em uma abordagem possibilística e envolve uma generalização, baseada em conjuntos *fuzzy*, da abordagem clássica para lidar com a incerteza e produzir soluções robustas em análise multicritério. Seu uso, na forma original, busca utilizar ao máximo as informações quantitativas disponíveis para reduzir as regiões de incerteza de decisão. Caso a informação quantitativa não conduza a uma solução única, o esquema original pressupõe a aplicação de informação de caráter qualitativo (baseada no conhecimento, experiência e intuição de especialistas) na fase de decisão final. Porém, cada vez mais, deparamo-nos com problemas cuja essência exige a consideração dos objetivos formados com base em informação qualitativa (atratividade do investimento, efeito político, flexibilidade de manutenção etc.), em todas as fases do processo de decisão. Sendo assim, esse estudo visa gerar soluções robustas através da construção de combinações representativas de dados iniciais, estados da natureza ou cenários com uso direto de informações qualitativas apresentadas juntamente com informações quantitativas (com a possibilidade de os especialistas aplicarem diversos formatos de preferência processados por funções de transformação), realizando um processo de fusão de informações dentro dos modelos multiobjetivos. Os resultados são de caráter universal e aplicáveis a diversas classes de problemas multiobjetivo. Esse artigo também propõe uma nova abordagem para a formulação, homogênea e aceitável pelos especialistas, de objetivos específicos de alocação. Exemplos são apresentados para ilustrar os resultados do estudo.

O capítulo **“Construção de cenários para análise multicritério em condições de incerteza com base em informações quantitativas e qualitativas usando a decisão em grupo”** trata de uma análise multicritério (análise de modelos multiobjetivos e modelos multiatributos) em condições de incerteza. A solução do problema está associada ao esquema geral de tomada de decisão multicritério sob condições de incerteza. Esse esquema é baseado na aplicação de uma abordagem possibilística e envolve uma generalização baseada em conjuntos *fuzzy* de uma abordagem clássica para lidar com a incerteza para produzir soluções robustas de problemas multicritérios. A utilização desse esquema em uma forma original permite utilizar ao máximo as informações quantitativas disponíveis para reduzir as regiões de incerteza de decisão. Caso a utilização de informações quantitativas não conduza a uma solução única, o esquema geral supõe a utilização de informações de caráter qualitativo (baseadas no conhecimento, experiência e intuição dos profissionais envolvidos) aplicadas na etapa final do processo de decisão.

Ao mesmo tempo, surgem com maior frequência problemas que exigem a consideração de objetivos (atratividade de investimento, efeito político, flexibilidade de manutenção etc.) formados com base em informação qualitativa, em todas as fases do processo de decisão. Levando isso em consideração, o nosso estudo anterior teve como objetivo gerar soluções multicritério, incluindo soluções robustas multicritério, através da construção de combinações representativas de dados iniciais, estados da natureza ou cenários com uso direto de informações qualitativas apresentadas juntamente com informações quantitativas, realizando um processo de junção de informações dentro de modelos. No entanto, o processamento de informações qualitativas no estudo anterior baseia-se na aplicação de uma abordagem muito simples para agregar estimativas de preferências individuais de especialistas dentro de um modelo de tomada de decisão multicritério em grupo, sem construir e analisar diversos tipos de informações de consenso. Tendo isso em conta, o presente estudo visa construir combinações representativas de dados iniciais, estados da natureza ou cenários com utilização direta de informação qualitativa, com base em estimativas de preferência de especialistas individuais agregadas depois de alcançar o consenso necessário. Em particular, é proposto um novo esquema para a construção de consenso. A sua utilização permite evitar pontos negativos inerentes às abordagens tradicionais e reduzir os níveis de incerteza na estimativa dos coeficientes de funções objetivo construídas com base na aplicação de informação qualitativa. Exemplos são apresentados para ilustrar os resultados do estudo.

O objetivo principal das pesquisas cujos resultados são refletidos no capítulo **“Tomada de Decisão Multiatributo para processamento da informação qualitativa aplicada à prospecção de alternativas locais para a geração de energia renovável”** é desenvolver ferramentas para a consideração de informações qualitativas na resolução de problemas espaciais com aplicação específica na determinação de alternativas locais para geração de energia renovável. Esses problemas possuem uma natureza complexa e a sua análise deve ser capaz de levar em conta uma ampla gama de considerações, bem como avaliações de caráter qualitativo. O processo decisório discutido inicia-se com estudos relacionados ao levantamento de critérios espaciais relevantes, que são modelados e processados dentro da análise multicritério espacial. A importância relativa de tais critérios é estabelecida pelos especialistas envolvidos com base na construção, transformação e processamento das relações de preferência no âmbito do *analytic hierarchy process*. Os mapas de decisão resultantes são obtidos por meio da agregação dos critérios espaciais, utilizando o operador *Ordered Weighted Averaging* em conjunto com Quantificadores Linguísticos *Fuzzy*. Os mapas permitem destacar alternativas de soluções racionais, que, se necessário, são avaliadas, comparadas, escolhidas, priorizadas e/ou ordenadas, aplicando critérios espaciais adicionais (de caráter quantitativo e qualitativo), por meio de técnicas de modelagem de preferências em ambiente *fuzzy* (aplicando-se os princípios metodológicos dos chamados modelos $\langle X, R \rangle$). Dessa forma, o processo de decisão correspondente permite a consideração e processamento de critérios espaciais quantitativos e qualitativos, bem como preferências e julgamentos de especialistas. Os resultados apresentados no capítulo são ilustrados por um estudo de caso relacionado à determinação das alternativas locais para usinas renováveis no estado de Minas Gerais, Brasil.

A pesquisa cujos resultados são discutidos no capítulo **“Tomada de decisões espaciais sob incertezas para apoiar a prospecção de locais para sistemas híbridos de geração de energia renovável”** visa desenvolver ferramentas metodológicas para que os tomadores de decisão (DMs) determinem os locais de geração de sistemas híbridos de energia renovável, considerando as características de complementaridade das fontes correspondentes e sua disponibilidade sazonal. O processo de decisão sobre novos locais começa com a utilização de Sistemas de Informação Geográfica para modelar critérios espaciais relevantes. A solução do problema está associada à utilização do operador Slide-OWA, que permite controlar os níveis de compensação intercritérios ajustando parâmetros de pessimismo e otimismo. Após a construção de estimativas multicritério para os locais geradores, o esquema geral de tomada de decisão multiobjetivo em condições de incerteza é aplicado. Tal esquema baseia-se na abordagem possibilística, que envolve a construção de matrizes de *payoff*. Nesse ponto, é possível que algumas alternativas não possam ser distinguidas com base apenas nos critérios considerados até agora, ou o DM possa querer avaliar as alternativas do ponto de vista de considerações adicionais. Para tanto, aplica-se a estrutura de modelos de tomada de decisão multiatributos, empregando métodos de modelagem de preferências em um ambiente *fuzzy*. Os resultados do presente trabalho são aplicados a um estudo de caso do estado de Minas Gerais no Brasil. Esses resultados desempenham um papel estratégico para governos e investidores nas suas decisões, ao mesmo tempo que consideram a capacidade de cumprir uma vasta gama de critérios.

O objetivo das pesquisas cujos resultados são analisados no capítulo **“Avaliação do risco operacional em subestações de energia elétrica e sua redução racional com base na alocação multicritério de recursos”** foi a aprimoração da qualidade das estimativas do risco operacional em subestações de energia elétrica e o aumento da eficiência na sua redução, utilizando modelos e métodos de tomada de decisão multicritério. A aplicação da metodologia proposta permite avaliar, comparar, priorizar e/ou ordenar subestações de energia elétrica do ponto de vista dos riscos operacionais e alocar racionalmente os recursos disponíveis para reduzir esses riscos. É apresentado um método de Avaliação de Risco Sistêmico (ARS) que integra conceitos de avaliação de riscos e técnicas de tomada de decisão multicritério. O uso do ARS permite considerar opiniões de especialistas para obter estimativas de risco operacional. Essas estimativas são usadas para alocar recursos entre as subestações dentro de modelos multicritérios. A análise baseia-se na aplicação da modificação da abordagem Bellman-Zadeh para tomada de decisões em um ambiente *fuzzy* para resolver problemas multicritérios, fornecendo suas soluções harmoniosas. O estudo de caso apresentado no capítulo demonstra a possibilidade de reduzir a subjetividade da avaliação de risco e melhorar a qualidade das decisões tomadas na alocação de recursos.

Caracterizando o capítulo **“O conhecimento dos especialistas e o estresse cognitivo de avaliar muitas alternativas são importantes: uma nova perspectiva sobre o problema da inconsistência em comparações entre pares”**, é necessário indicar que não faltam estudos que tratam da consistência das avaliações realizadas por comparação pareada na literatura de tomada de decisão. Em sua maioria, esses estudos oferecem algoritmos para reduzir a inconsistência das avaliações ou apresentam índices

para medir o grau de consistência da avaliação. O foco nessas duas frentes de pesquisa não cobre todas as lacunas associadas ao problema de avaliação inconsistente. Os algoritmos existentes são difíceis de implementar e não preservam as avaliações originais, uma vez que a matriz de avaliação original é substituída por uma nova matriz. Além disso, a inconsistência da comparação entre pares tem sido associada à racionalidade limitada do especialista apenas no nível teórico-conceitual. A pesquisa relatada nesse capítulo investiga a relação entre a falta de conhecimento do especialista e a inconsistência das avaliações, bem como introduz uma abordagem que garante a consistência da avaliação ao reduzir o estresse cognitivo do especialista ao comparar um elevado número de alternativas. Os resultados revelam que o conhecimento limitado do especialista sobre o tema não impacta no grau de consistência das avaliações esperado. O grau de consistência da avaliação é 59% menor quando o especialista não possui conhecimento sobre o tema da decisão, mas possui conhecimento teórico e experiência na avaliação de alternativas por comparação pareada. Essa é uma contribuição notável com um elevado grau de universalidade e aplicabilidade porque instruir os decisores sobre o problema da inconsistência é uma forma mais barata e fácil de aumentar o grau de consistência da avaliação sem alterar a informação original. Além disso, a abordagem introduzida reduz o número de avaliações e o tempo de avaliação em 8,0 e 7,8 vezes, respectivamente.

Sobre a tomada de decisão multicritério em condições de incerteza¹

Joel Gomes Pereira Júnior, Petr Iakovlevitch Ekel, Reinaldo Martinez Palhares, Roberta Oliveira Parreiras, Mateus Toledo da Silveira Leão

1. Introdução

No processo de formulação e resolução de uma ampla gama de problemas de caráter de otimização relacionados ao projeto, planejamento, operação e controle de sistemas complexos, inevitavelmente encontramos diversos tipos de incerteza (Antunes; Dias, 2007; Ekel, 1999; French, 1995; Stewart, 2005; Zimmermann, 2000). Durbach e Stewart (2012) e Stewart (2005) distinguem duas classes de incertezas na tomada de decisão: incertezas internas [relacionadas aos valores e julgamentos do tomador de decisão (*Decision-Maker* – DM)] e incertezas externas (definidas por condições ambientais que estão além do controle do DM). Embora este artigo trate de ambos os tipos de incertezas, seu principal objetivo é lidar com as incertezas externas em problemas de natureza multicritério.

Levando isso em consideração, podemos elencar duas categorias de situações que requerem a utilização de uma abordagem multicritério (Ekel, 2002; Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011):

- problemas em que as consequências da solução não podem ser estimadas com base no uso de um único objetivo. Esses problemas estão relacionados com a análise de modelos que incluem índices econômicos e físicos (quando as alternativas não podem ser reduzidas a uma forma comparável) ou índices cujas estimativas de custos são dificultadas (por exemplo, muitos problemas de energia devem ser considerados com base em critérios de natureza tecnológica, econômica, ecológica e social);
- problemas que podem ser resolvidos com base na utilização de um único objetivo ou mesmo de vários objetivos. No entanto, se a incerteza da informação não permite derivar soluções únicas, então esses problemas podem ser reescritos como problemas multicritério, incluindo critérios adicionais, que podem ter uma natureza qualitativa, sendo baseados no conhecimento, experiência e intuição dos especialistas envolvidos (por exemplo, “complexidade de manutenção”, “atratividade de investimentos” etc.). Isso pode servir como um meio útil para reduzir as regiões de incerteza de decisão correspondentes.

Portanto, duas classes de modelos multicritérios podem ser construídas (Ekel, 2002; Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011):

- $\langle X, F \rangle$, referindo-se a modelos multiobjetivos,

¹ **Reconhecimento:** A versão de registro deste artigo está publicada na *Information Sciences*, e está disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.ins.2015.06.01> 030.

PEREIRA JR., J. G. *et al.* On multicriteria decision making under conditions of uncertainty. *Information Sciences*, v. 324, p. 44-59, Dec. 2015.

- $\langle X, R \rangle$, referindo-se a modelos multiatributos.

Na análise de modelos $\langle X, F \rangle$ é considerado um vetor de funções objetivo $F(X) = \{F_1(X), \dots, F_q(X)\}$ e o problema consiste na otimização simultânea de todas as funções objetivo, ou seja

$$F_p(X) \rightarrow \text{extr}_{X \in L}, \quad p = 1, \dots, q \quad (1)$$

Onde L é uma região viável em $\mathbf{R}^n$.

Um passo importante na análise do problema (1) é a determinação de um conjunto de soluções de Pareto $\Omega \subseteq L$ (Pareto, 1886). Essa etapa é útil. No entanto, não permite obter soluções únicas. Como consequência, é necessário escolher uma determinada solução de Pareto tendo em conta as informações fornecidas pelo DM. Três abordagens para usar essas informações são classificadas em Coelho (2005) e Pedrycz, Ekel e Parreiras (2011): *a priori*, *a posteriori* e adaptativa.

Ao analisar problemas multiobjetivos, é necessário desenvolver respostas para algumas questões específicas. Entre essas questões, é importante levantar a normalização das funções objetivo, a consideração da importância ou prioridade de cada função objetivo e a seleção de um princípio de otimalidade. As respostas a essas questões e, posteriormente, o desenvolvimento de métodos multiobjetivos são realizados em diversas direções (Ehrgott, 2005; Miettinen, 1999; Rao, 1996), por exemplo. Mas, sem entrar em maiores discussões sobre o assunto, cabe ressaltar que uma questão importante na análise multiobjetivo é a qualidade das soluções obtidas. A qualidade é considerada alta se os níveis de satisfação das funções objetivo forem iguais ou próximos entre si, quando todos os objetivos têm a mesma importância (consulte o conceito de soluções harmoniosas em Ekel (2002) e Ekel e Galperin (2003)). Esse conceito pode ser estendido para lidar com funções objetivo com diferentes níveis de importância (Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011). Nesse ponto, é importante ressaltar a validade e a conveniência da direção relacionada ao princípio do resultado garantido (Ekel, 2002; Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011), que pode ser implementado aplicando a modificação da abordagem Bellman-Zadeh à tomada de decisão em um ambiente *fuzzy* (Bellman; Zadeh, 1970; Pedrycz; Gomide, 1998; Zimmermann, 1990). A sua utilização permite realizar um método eficaz (do ponto de vista computacional) e também rigoroso (do ponto de vista da obtenção de soluções $X^0 \subseteq \Omega \subseteq L$) de análise de modelos multiobjetivos. A sua aplicação permite preservar uma medida natural de incerteza na tomada de decisões e levar em conta índices, critérios e restrições de caráter qualitativo.

Diversos aspectos da utilização da modificação da abordagem Bellman-Zadeh na análise de modelos $\langle X, F \rangle$ são discutidos em (Ekel, 2002; Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011). O uso dos resultados de (Ekel, 2002; Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011) para resolver diversas classes de problemas de energia é considerado em (Berredo *et al.*, 2011; Canha *et al.*, 2007; Ekel *et al.*, 2013).

Por outro lado, Stewart (2005) indica que muitos modelos multicritérios baseiam-se essencialmente em avaliações determinísticas das consequências de cada ação em termos de cada critério, possivelmente submetendo os resultados finais e recomendações

a um certo grau de análise de sensibilidade. A utilização de tal abordagem pode ser justificada quando a principal fonte de complexidade na tomada de decisões está relacionada com a natureza multicritério do problema e não com a natureza incerta das consequências individuais. No entanto, nas situações em que os riscos e incertezas são tão críticos quanto questões de objetivos conflitantes (por exemplo, Ma *et al.*, 2013; Rottkemper; Fischer; 2013; Stewart, 2005), é necessária uma modelagem de incerteza mais formal (Stewart, 2005). Essa importante consideração é consistente com a visão dos autores Pedrycz, Ekel e Parreiras (2011), onde se distinguem duas formas principais de resolver problemas sob condições de incerteza. Ao aplicar a primeira forma, obtém-se (pelo menos teoricamente) uma solução exata para valores fixos dos parâmetros incertos e, então, estima-se sua estabilidade para variações desses parâmetros (por exemplo, realizando cálculos multivariantes). A segunda forma pressupõe o acompanhamento do efeito da incerteza em todas as etapas do caminho até a decisão final. Esse caminho é mais complicado que o primeiro, mas também é mais frutífero e altamente promissor. Permite aumentar a adequação dos modelos construídos e, consequentemente, a credibilidade e eficiência factual das decisões baseadas na sua análise. Levando isso em consideração, deve-se notar que os resultados de Ekel *et al.* (2011) e Ekel, Martini e Palhares (2008) podem servir como ferramenta metodológica para implementação da segunda via na consideração da incerteza na tomada de decisão multicritério.

Os resultados de Ekel *et al.* (2011) e Ekel, Martini e Palhares (2008) estão associados à generalização da abordagem clássica (Belyaev, 1977; Luce; Raiffa, 1957; Raiffa, 1968) para lidar com a incerteza da informação, baseada na construção e análise de matrizes de *payoff* que refletem efeitos que podem ser obtidos para diferentes combinações de alternativas de solução e os chamados estados de natureza ou cenários, desde a tomada de decisão monocritério até problemas multicritério.

Os resultados de Ekel *et al.* (2011) e Ekel, Martini e Palhares (2008) baseiam-se na combinação de dois ramos da matemática da incerteza: elementos da teoria dos jogos e da teoria dos conjuntos *fuzzy* e não se enquadram nas abordagens gerais para lidar com incertezas externas na análise multicritério, classificadas e analisadas em Durbach e Stewart (2012) e Stewart (2005) e discutidas em trabalhos mais recentes (Eiself; Marianov, 2014; Gaspars-Wieloch, 2014). Esses resultados, combinados com a análise de modelos $\langle X, F \rangle$ e modelos $\langle X, R \rangle$ (relacionados à tomada de decisão individual ou em grupo baseada na modelagem de preferências *fuzzy* (Ekel; Schuffner Neto, 2006; Herrera-Viedma *et al.*, 2014; Herrera-Viedma; Herrera; Chiclana, 2002; Parreiras *et al.*, 2010; Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011), por exemplo; considerando que modelos $\langle X, R \rangle$ são utilizados para análise de problemas multiatributos, outras abordagens (Liao; Xu, 2014; Liao; Xu; Zeng, 2014; Xu, 2014), por exemplo, também podem ser aplicadas) serviram para desenvolver um esquema geral de tomada de decisão multicritério sob condições de incerteza. Esse esquema permite utilizar informações quantitativas disponíveis em um grau máximo para reduzir as regiões de incerteza de decisão. Se a capacidade resolutive dos procedimentos de processamento formal de informação não permite obter soluções únicas, então o esquema pressupõe a aplicação de informação qualitativa baseada no conhecimento, experiência e intuição de especialistas.

Exemplos de aplicação da generalização da abordagem clássica que trata da incerteza da informação à tomada de decisão multicritério são dados em (Ekel *et al.*, 2011; Ekel; Martini; Palhares, 2008; Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011). Contudo, a nossa experiência na sua utilização revelou algumas limitações, que podem levar a decisões contraditórias, discutidas abaixo. A superação dessas limitações baseia-se na abordagem proposta que permite a consideração simultânea dos critérios de escolha da abordagem clássica (Belyaev, 1977; Luce; Raiffa, 1957; Raiffa, 1968) como funções objetivo no âmbito de modelos $\langle X, F \rangle$, cuja análise fornece soluções harmoniosas. Tal consideração dos critérios de escolha da abordagem clássica (Belyaev, 1977; Luce; Raiffa, 1957; Raiffa, 1968) é de caráter fundamental e serve de base para modificar e melhorar os resultados de (Ekel *et al.*, 2011; Ekel; Martini; Palhares, 2008). Isso é demonstrado de forma convincente por exemplos de aplicações.

2. Abordagem clássica para lidar com a incerteza da informação e sua generalização para problemas de tomada de decisão multicritério

A abordagem clássica (Belyaev, 1977; Luce; Raiffa, 1957; Raiffa, 1968) para lidar com a incerteza da informação baseia-se na suposição de que a análise é realizada para um determinado número K de alternativas $X_k(k) = 1, \dots, K$ de solução e um determinado número S de combinações representativas de dados iniciais (os estados de natureza ou cenários) Y_s , $s = 1, \dots, S$, que definem a matriz de *payoff* correspondente (as seis primeiras colunas da Tabela 1). A matriz de *payoff* reflete os efeitos (ou consequências) de uma ou outra ação X_i , $i = 1, \dots, K$ para o estado de natureza correspondente Y_s , $s = 1, \dots, S$.

A análise das matrizes de *payoff* e a escolha das alternativas racionais de solução baseiam-se na utilização de critérios de escolha (Belyaev, 1977; Luce; Raiffa, 1957; Raiffa, 1968). A aplicação dos critérios de escolha de Wald, Laplace, Savage e Hurwicz, que são de caráter geral, é discutida no presente artigo. Existem outros critérios de escolha (por exemplo, critérios de Bayes, probabilidade máxima, dispersão mínima, medida máxima de conjuntos bayesianos, potência integral máxima, Menges etc. (Hodges Jr.; Lehmann, 1952; Trukhaev, 1981). Contudo, esses critérios supõem as determinadas situações de informação sobre os estados da natureza.

Para entender melhor o uso dos critérios de Wald, Laplace, Savage e Hurwicz, a Tabela 1 inclui as seguintes estimativas características para a alternativa de solução dada:

- o nível mínimo de função objetivo

$$F^{\min}(X_k) = \min_{1 \leq s \leq S} F(X_k, Y_s) \quad (2)$$

que é a estimativa mais otimista se a função objetivo for minimizada ou a estimativa mais pessimista se a função objetivo for maximizada;

- o nível máximo da função objetivo

$$F^{\max}(X_k) = \max_{1 \leq s \leq S} F(X_k, Y_s) \quad (3)$$

que é a estimativa mais otimista para a função objetivo maximizada ou a estimativa mais pessimista se a função objetivo for minimizada;

- o nível médio da função objetivo

$$\bar{F}(X_k) = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S F(X_k, Y_s); \quad (4)$$

- o nível máximo de risco (arrependimento):

$$R^{\max}(X_k) = \max_{1 \leq s \leq S} R(X_k, Y_s) \quad (5)$$

onde $R(X_k, Y_s)$ é um gasto excessivo que ocorre sob a combinação do estado de natureza Y_s e a escolha da alternativa de solução X_k em vez da alternativa de solução que é localmente ótima para o dado Y_s .

Tabela² 1. Matriz de *payoff* com estimativas características

	Y_1	...	Y_2	...	Y_s	$F^{\min}(X_k)$	$F^{\max}(X_k)$	$\bar{F}(X_k)$	$R^{\max}(X_k)$
X_1	$F(X_1, Y_1)$	...	$F(X_1, Y_s)$	...	$F(X_1, Y_s)$	$F^{\min}(X_1)$	$F^{\max}(X_1)$	$\bar{F}(X_1)$	$R^{\max}(X_1)$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
X_k	$F(X_k, Y_1)$	...	$F(X_k, Y_s)$	...	$F(X_k, Y_s)$	$F^{\min}(X_k)$	$F^{\max}(X_k)$	$\bar{F}(X_k)$	$R^{\max}(X_k)$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
X_K	$F(X_K, Y_1)$	...	$F(X_K, Y_s)$	...	$F(X_K, Y_s)$	$F^{\min}(X_K)$	$F^{\max}(X_K)$	$\bar{F}(X_K)$	$R^{\max}(X_K)$
	$F^{\min}(Y_1)$	...	$F^{\min}(Y_s)$	...	$F^{\min}(Y_s)$				

Para determinar os riscos $R(X_k, Y_s)$, é necessário definir o valor mínimo da função objetivo (se for minimizada, como na Tabela 1) para cada combinação do estado de natureza Y_s (para cada coluna da matriz de *payoff*):

$$F^{\min}(Y_s) = \min_{1 \leq k \leq K} F(X_k, Y_s) \quad (6)$$

Por outro lado, para que a função objetivo seja maximizada, é necessário definir o seu valor máximo para cada combinação do estado de natureza Y_s (para cada coluna da matriz de *payoff*):

$$F^{\max}(Y_s) = \max_{1 \leq k \leq K} F(X_k, Y_s) \quad (7)$$

O risco para qualquer alternativa de solução X_k e qualquer estado de natureza Y_s pode ser avaliado como

$$R(X_k, Y_s) = F(X_k, Y_s) - F^{\min}(Y_s) \quad (8)$$

² Todas as Tabelas, Figuras e Gráficos foram elaborados pelos autores.

se a função objetivo deve ser minimizada ou

$$R(X_k, Y_s) = F^{\max}(Y_s) - F(X_k, Y_s) \quad (9)$$

se for para ser maximizado.

Os critérios de escolha, que se baseiam na utilização das estimativas características, são representados abaixo sob a suposição de que a função objetivo deve ser minimizada.

O critério de escolha de Wald utiliza a estimativa $F^{\max}(X_k)$ e permite escolher as alternativas de solução X^W , para as quais a estimativa é mínima:

$$\min_{1 \leq k \leq K} F^{\max}(X_k) = \min_{1 \leq k \leq K} \max_{1 \leq s \leq S} F(X_k, Y_s) \quad (10)$$

A utilização desse critério gera alternativas de solução, assumindo a combinação mais desfavorável de dados iniciais. Garante que o nível da função objetivo não seja superior a um determinado valor em quaisquer condições futuras possíveis. Essa é a sua dignidade (Belyaev, 1977). Por outro lado, a orientação sobre a combinação mais desfavorável de dados iniciais é extremamente cautelosa (pessimista ou conservadora) (Belyaev, 1977).

O critério de escolha de Laplace utiliza a estimativa $\bar{F}(X_k)$ e é orientado a escolher as alternativas de solução X^L , para as quais a estimativa é mínima:

$$\min_{1 \leq k \leq K} \bar{F}(X_k) = \min_{1 \leq k \leq K} \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S F(X_k, Y_s) \quad (11)$$

Esse critério corresponde ao princípio da “razão insuficiente” (Belyaev, 1977), ou seja, à suposição de que não temos base para distinguir uma ou outra combinação de dados iniciais. Assim, é necessário agir, pois são igualmente prováveis. Essa é a sua desvantagem. No entanto, a pontuação média é suficientemente importante.

O critério de escolha de Savage está associado ao uso de estimativa $R^{\max}(X_k)$ e permite escolher as alternativas de solução X^S , para as quais a estimativa é mínima:

$$\min_{1 \leq k \leq K} R^{\max}(X_k) = \min_{1 \leq k \leq K} \max_{1 \leq s \leq S} R(X_k, Y_s) \quad (12)$$

Tal como no caso do critério de escolha de Wald, a utilização de (12) baseia-se no princípio minimax. Portanto, o critério de escolha de Savage também pode ser considerado conservador. Contudo, a experiência (Belyaev, 1977) mostra que as recomendações baseadas na aplicação de (12) são incompatíveis com as decisões obtidas com a utilização de (10). Operando com valores de $R^{\max}(X_k)$, obtemos uma avaliação da situação ligeiramente diferente, o que poderá levar a recomendações mais “ousadas” (menos conservadoras).

Finalmente, o critério de escolha de Hurwicz utiliza uma combinação convexa de $F^{\max}(X_k)$ e $F^{\min}(X_k)$ e permite escolher as alternativas de solução X^H , pois esta combinação é mínima:

$$\min_{1 \leq k \leq K} [\alpha F^{\max}(X_k) + (1 - \alpha) F^{\min}(X_k)] = \min_{1 \leq k \leq K} [\alpha \max_{1 \leq s \leq S} F(X_k, Y_s) + (1 - \alpha) \min_{1 \leq s \leq S} F(X_k, Y_s)] \quad (13)$$

onde $\alpha \in [0,1]$ é o índice “pessimismo-otimismo” cuja magnitude é definida pelo DM. Se $\alpha=1$, o critério de escolha de Hurwicz é transformado no critério de escolha de Wald e se $\alpha=0$, (13) é transformado no critério de “otimismo extremo” (min-min) para o qual a combinação mais favorável de dados iniciais é assumida. Quando $0<\alpha<1$, obtemos algo médio e esta é a atratividade do critério de Hurwicz. Belyaev (1977) recomenda escolher seu intervalo de 0,5 a 1,0.

Os critérios de escolha discutidos acima encontraram amplas aplicações práticas (por exemplo, Belyaev (1977) e Grassman (1971) para tomada de decisão monocritério sob condições de incerteza. Kuchta (2007), Wen e Iwamura (2008) e Yager (1996) aplicaram elementos da teoria dos conjuntos *fuzzy* para melhorar a abordagem clássica para lidar com a incerteza da informação, mas apenas na análise monocritério.

Os critérios de escolha (10)-(13) também foram utilizados em (Ekel *et al.*, 2011; Ekel; Martini; Palhares, 2008) se mais de uma função objetivo for considerada.

Na sequência, apresentamos as informações sobre o uso da abordagem Bellman-Zadeh para tomada de decisão em um ambiente *fuzzy* (Bellman; Zadeh, 1970; Pedrycz; Gomide, 1998; Zimmermann, 1990) para resolução de problemas multiobjetivo e, ao mesmo tempo, para generalizar a abordagem clássica para lidar com incerteza da informação.

Ao usar a modificação da abordagem de Bellman-Zadeh, as funções objetivo $F_p(X)$, $p=1, \dots, q$ são substituídas por conjuntos *fuzzy* $A_p = \{X, \mu_{A_p}(X)\}$, $X \in L$, $p = 1, \dots, q$ onde $\mu_{A_p}(X)$ é a função de pertinência de A_p (Pedrycz, Gomide, 1998; Zimmermann, 1990). Uma solução *fuzzy* D é definida como $D = \bigcap_{p=1}^q A_p$ com a função de pertinência

$$\mu_D(X) = \min_{1 \leq p \leq q} \mu_{A_p}(X), \quad X \in L \quad (14)$$

O uso de (14) permite obter a solução

$$\max \mu_D(X) = \max_{X \in L} \min_{1 \leq p \leq q} \mu_{A_p}(X) \quad (15)$$

Portanto, o problema (1) se reduz a procurar

$$X^0 = \arg \max_{X \in L} \min_{1 \leq p \leq q} \mu_{A_p}(X) \quad (16)$$

Para obter (16), é necessário construir $\mu_{A_p}(X)$, $p = 1, \dots, q$ que reflete um grau de alcance dos próprios ótimos por p $F_p(X)$, $X \in L$, $p = 1, \dots, q$.

Essa condição é satisfeita (Pedrycz, Ekel, Parreiras, 2011) se escolhermos

$$\mu_{A_p}(X) = \left[\frac{\max_{X \in L} F_p(X) - F_p(X)}{\max_{X \in L} F_p(X) - \min_{X \in L} F_p(X)} \right]^{\lambda_p} \quad (17)$$

para funções objetivo minimizadas ou:

$$\mu_{A_p}(X) = \left[\frac{F_p(X) - \min_{X \in L} F_p(X)}{\max_{X \in L} F_p(X) - \min_{X \in L} F_p(X)} \right]^{\lambda_p} \quad (18)$$

para os maximizados. Em (17) e (18), $\lambda_p, p = 1, \dots, q$ estão os fatores de importância para as funções objetivo correspondentes.

Como foi indicado acima, a aplicação da modificação da abordagem de Bellman-Zadeh à tomada de decisão num ambiente *fuzzy* fornece linhas construtivas na obtenção de soluções multicritério harmoniosas com base na análise de problemas max-min associados (15). Assim, é possível propor a generalização da abordagem clássica para lidar com a incerteza informacional, aplicando a modificação da abordagem de Bellman-Zadeh à tomada de decisão em um ambiente *fuzzy*. Naturalmente, se existem q funções objetivo então q matrizes de *payoff* são construídas e analisadas.

Aplicando (17) para funções objetivo minimizadas ou (18) para funções maximizadas, é possível construir a matriz de *payoff* modificada (normalizada) para a p -ésima função objetivo apresentada na Tabela 2.

A disponibilidade de q matrizes de *payoff* modificadas permite construir a matriz de *payoff* agregada apresentada na Tabela 3, aplicando (14).

Tabela 2. Matriz de *payoff* modificada para a p -ésima função objetivo

	Y_1	...	Y_s	...	Y_S
X_1	$\mu_{A_p}(X_1, Y_1)$	...	$\mu_{A_p}(X_1, Y_s)$	...	$\mu_{A_p}(X_1, Y_S)$
...	...	...	...	...	...
X_k	$\mu_{A_p}(X_k, Y_1)$	...	$\mu_{A_p}(X_k, Y_s)$	...	$\mu_{A_p}(X_k, Y_S)$
...	...	...	...	...	...
X_K	$\mu_{A_p}(X_K, Y_1)$	...	$\mu_{A_p}(X_K, Y_s)$	...	$\mu_{A_p}(X_K, Y_S)$

Tabela 3. Matriz de *payoff* agregada com estimativas características

	Y_1	...	Y_s	...	Y_S	$\mu_D^{\max}(X_k)$	$\mu_D^{\min}(X_k)$	$\bar{\mu}_D(X_k)$	$R^{\max}(X_k)$
X_1	$\mu_D(X_1, Y_1)$	...	$\mu_D(X_1, Y_s)$	...	$\mu_D(X_1, Y_S)$	$\mu_D^{\max}(X_1)$	$\mu_D^{\min}(X_1)$	$\bar{\mu}_D(X_1)$	$R^{\max}(X_1)$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
X_k	$\mu_D(X_k, Y_1)$	...	$\mu_D(X_k, Y_s)$	...	$\mu_D(X_k, Y_S)$	$\mu_D^{\max}(X_k)$	$\mu_D^{\min}(X_k)$	$\bar{\mu}_D(X_k)$	$R^{\max}(X_k)$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
X_K	$\mu_D(X_K, Y_1)$	...	$\mu_D(X_K, Y_s)$	...	$\mu_D(X_K, Y_S)$	$\mu_D^{\max}(X_K)$	$\mu_D^{\min}(X_K)$	$\bar{\mu}_D(X_K)$	$R^{\max}(X_K)$
$\mu_D^{\max}(Y_s)$	$\mu_D^{\max}(Y_1)$	...	$\mu_D^{\max}(Y_s)$	...	$\mu_D^{\max}(Y_S)$				

As estimativas características da Tabela 3 são as seguintes: os níveis máximo $\mu_D^{\max}(X_k) = \max_{1 \leq k \leq K} \mu_D(X_k, Y_s)$, mínimo $\mu_D^{\min}(X_k) = \min_{1 \leq s \leq S} \mu_D(X_k, Y_s)$ e médio $\bar{\mu}_D(X_k) = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \mu_D(X_k, Y_s)$ da função de pertinência; o nível máximo de risco, definido como em (5) onde $R(X_i, Y_s) = \mu_D^{\max}(Y_s) - \mu_D(X_i, Y_s)$ onde $\mu_D^{\max}(Y_s) = \max_{1 \leq k \leq S} \mu_D(X_k, Y_s)$.

Essas estimativas servem para os critérios de escolha utilizados na generalização da abordagem clássica para lidar com a incerteza da informação na tomada de decisão multicritério (Ekel, 2011; Ekel, Martini, Palhares, 2008). Por exemplo, o critério de escolha modificado de Laplace tem a seguinte forma (ver (Ekel, 2011; Ekel, Martini, Palhares, 2008) para outros critérios de escolha modificados):

$$\max_{1 \leq k \leq K} \mu_D(X_i) = \max_{1 \leq k \leq K} \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \min_{1 \leq p \leq q} \mu_{A_p}(X_k, Y_s) \quad (19)$$

No entanto, podem-se apontar algumas limitações dessa generalização. Por exemplo, pode-se analisar um problema hipotético de bicritério relacionado à minimização de funções objetivo. As matrizes de *payoff* correspondentes com estimativas características (associadas à utilização do critério de escolha de Laplace) são apresentadas nas Tabelas 4 e 5.

Tabela 4. Matriz de *payoff* com estimativas características para a primeira função objetivo

	Y_1	Y_2	$\bar{F}(X_k)$
X_1	9.00	9.00	9.00
X_2	4.20	11.49	7.80
X_3	15.00	7.80	11.40
X_4	3.00	13.80	8.40

Tabela 5. Matriz de *payoff* com estimativas características para a segunda função objetivo

	Y_1	Y_2	$\bar{F}(X_k)$
X_1	8.40	14.80	11.60
X_2	13.20	5.20	9.20
X_3	2.00	18.00	10.00
X_4	11.60	13.20	12.40

As matrizes de *payoff* modificadas para as funções objetivo são apresentadas nas Tabelas 6 e 7. Finalmente, a matriz de *payoff* agregada com estimativas características é apresentada na Tabela 8.

Tabela 6. Matriz de *payoff* modificada para a primeira função objetivo

	Y_1	Y_2
X_1	0.50	0.50
X_2	0.90	0.30
X_3	0	0.60
X_4	1.00	0.10

Tabela 7. Matriz de *payoff* modificada para a segunda função objetivo

	Y_1	Y_2
X_1	0.60	0.20
X_2	0.30	0.90
X_3	1.00	0
X_4	0.40	0.30

Tabela 8. Matriz de *payoff* agregada com estimativas características

	Y_1	Y_2	$\bar{\mu}_D(X_k)$
X_1	0.50	0.20	0.35
X_2	0.30	0.30	0.30
X_3	0	0	0
X_4	0.40	0.10	0.25

Note que a solução X_2 é melhor que X_1 quando se aplica o critério de Laplace (do ponto de vista de ambos os critérios – Tabelas 4 e 5). Contudo, a análise da matriz de *payoff* agregada (Tabela 8) mostra que a melhor alternativa é X_1 . Embora esse exemplo

esteja associado à utilização do critério de escolha de Laplace, a utilização de outros critérios de escolha conduz frequentemente a resultados semelhantes. Considerando isso, o objetivo principal do presente artigo é melhorar os resultados de (Ekel, 2011; Ekel, Martini, Palhares, 2008) para superar essas contradições.

3. Critérios de escolha como funções objetivo na tomada de decisão multicritério sob incerteza de informação

A abordagem clássica para lidar com a incerteza da informação está associada à análise dos problemas (10)-(13) para uma dada função objetivo em um ambiente com vários estados de natureza Y_s , $s = 1, \dots, S$. Portanto, considerando os critérios de escolha de Wald, Laplace, Savage e Hurwicz, respectivamente, como funções objetivo, obtêm-se

$$F^W(X_k) = F^{\max}(X_k) = \max_{1 \leq s \leq S} F(X_k, Y_s) \quad (20)$$

$$F^L(X_k) = \bar{F}(X_k) = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S F(X_k, Y_s) \quad (21)$$

$$F^S(X_k) = R^{\max}(X_k) = \max_{1 \leq s \leq S} R(X_k, Y_s) \quad (22)$$

$$F^H(X_k) = \alpha F^{\max}(X_k) + (1 - \alpha) F^{\min}(X_k) = \alpha \max_{1 \leq s \leq S} F(X_k, Y_s) + (1 - \alpha) \min_{1 \leq s \leq S} F(X_k, Y_s) \quad (23)$$

Essa consideração dos critérios de escolha da abordagem clássica permite construir q problemas, geralmente, incluindo quatro ou menos funções objetivo (se nem todos os critérios de escolha forem usados na análise) como segue:

$$F_{r,p}(X) \rightarrow \text{extr}_{X \in L}, \quad r = 1, \dots, t \leq 4, \quad p = 1, \dots, q \quad (24)$$

onde as funções objetivo são: $F_{1,p}(X) = F_p^W(X)$, $F_{2,p}(X) = F_p^L(X)$, $F_{3,p}(X) = F_p^S(X)$, e $F_{4,p}(X) = F_p^H(X)$.

Assim, a análise das alternativas de solução e consequente escolha de alternativas de solução racional pode ser realizada no âmbito dos modelos $\langle X, F \rangle$.

Aplicando (17) para construir as funções de pertinência para $F_{r,p}(X)$, $r = 1, \dots, t$, $p = 1, \dots, q$ pode-se resolver o problema (15) para as alternativas de solução X_k , $k = 1, \dots, K$. A análise, realizada dessa forma, garante a escolha das alternativas de solução racional de acordo com o princípio da otimalidade de Pareto (1886) e permite superar as limitações da generalização da abordagem clássica para lidar com a incerteza da informação para a tomada de decisão multicritério, conforme discutido anteriormente. Considerando isto, a matriz de *payoff* com as estimativas características (Tabela 1) é apresentada como a matriz de *payoff* com as estimativas dos critérios de escolha $p = 1, \dots, q$ para (Tabela 9) ou para simplificar como a matriz das estimativas dos critérios de escolha na $p = 1, \dots, q$ Tabela 10.

Portanto, usando q matrizes para as estimativas dos critérios de escolha, podemos construir q matrizes modificadas das estimativas dos critérios de escolha ao aplicar (17), conforme mostrado na Tabela 11.

Finalmente, com aquelas q matrizes modificadas das estimativas dos critérios de escolha, após a aplicação (14), podemos construir a matriz agregada das estimativas dos critérios de escolha, conforme apresentado na Tabela 12. Essa matriz inclui as estimativas calculadas com base em (15) e usada para escolher as alternativas de solução.

Relembrando o exemplo apresentado na seção anterior, podemos encontrar a matriz modificada das estimativas dos critérios de escolha para a primeira função objetivo (Tabela 13). Ao mesmo tempo, a matriz modificada das estimativas dos critérios de escolha para a segunda função objetivo é dada na Tabela 14. A agregação dessas matrizes modificadas das estimativas dos critérios de escolha é apresentada na Tabela 15 e gera a solução $(X_2) = \{X_2\}$ baseada no uso do critério de escolha de Laplace.

Tabela 9. Matriz de *payoff* com estimativas de critérios de escolha para a p -ésima função objetivo

	Y_1	...	Y_s	...	Y_S	$F_p^W(X_k)$	$F_p^L(X_k)$	$F_p^S(X_k)$	$F_p^H(X_k)$
X_1	$F_p(X_1, Y_1)$	...	$F_p(X_1, Y_s)$	...	$F_p(X_1, Y_S)$	$F_p^W(X_1)$	$F_p^L(X_1)$	$F_p^S(X_1)$	$F_p^H(X_1)$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
X_k	$F_p(X_k, Y_1)$	...	$F_p(X_k, Y_s)$	...	$F_p(X_k, Y_S)$	$F_p^W(X_k)$	$F_p^L(X_k)$	$F_p^S(X_k)$	$F_p^H(X_k)$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
X_K	$F_p(X_K, Y_1)$	...	$F_p(X_K, Y_s)$	...	$F_p(X_K, Y_S)$	$F_p^W(X_K)$	$F_p^L(X_K)$	$F_p^S(X_K)$	$F_p^H(X_K)$
						$\min_{1 \leq k \leq K} F_p^W(X_k)$	$\min_{1 \leq k \leq K} F_p^L(X_k)$	$\min_{1 \leq k \leq K} F_p^S(X_k)$	$\min_{1 \leq k \leq K} F_p^H(X_k)$
						$\max_{1 \leq k \leq K} F_p^W(X_k)$	$\max_{1 \leq k \leq K} F_p^L(X_k)$	$\max_{1 \leq k \leq K} F_p^S(X_k)$	$\max_{1 \leq k \leq K} F_p^H(X_k)$

Tabela 10. Matriz de estimativas de critérios de escolha para a p -ésima função objetivo

	$F_p^W(X_k)$	$F_p^L(X_k)$	$F_p^S(X_k)$	$F_p^H(X_k)$
X_1	$F_p^W(X_1)$	$F_p^L(X_1)$	$F_p^S(X_1)$	$F_p^H(X_1)$
...	...	...	...	...
X_k	$F_p^W(X_k)$	$F_p^L(X_k)$	$F_p^S(X_k)$	$F_p^H(X_k)$
...	...	...	...	...
X_K	$F_p^W(X_K)$	$F_p^L(X_K)$	$F_p^S(X_K)$	$F_p^H(X_K)$
		$\min_{1 \leq k \leq K} F_p^W(X_k)$	$\min_{1 \leq k \leq K} F_p^L(X_k)$	$\min_{1 \leq k \leq K} F_p^S(X_k)$
		$\min_{1 \leq k \leq K} F_p^H(X_k)$		
		$\max_{1 \leq k \leq K} F_p^W(X_k)$	$\max_{1 \leq k \leq K} F_p^L(X_k)$	$\max_{1 \leq k \leq K} F_p^S(X_k)$
		$\max_{1 \leq k \leq K} F_p^H(X_k)$		

Tabela 11. Estimativas da matriz modificada de critérios de escolha para a p -ésima função objetivo

	$\mu_{A_p}^W(X_k)$	$\mu_{A_p}^L(X_k)$	$\mu_{A_p}^S(X_k)$	$\mu_{A_p}^H(X_k)$
X_1	$\mu_{A_p}^W(X_1)$	$\mu_{A_p}^L(X_1)$	$\mu_{A_p}^S(X_1)$	$\mu_{A_p}^H(X_1)$
...	...	...	...	...
X_k	$\mu_{A_p}^W(X_k)$	$\mu_{A_p}^L(X_k)$	$\mu_{A_p}^S(X_k)$	$\mu_{A_p}^H(X_k)$
...	...	...	...	...
X_K	$\mu_{A_p}^W(X_K)$	$\mu_{A_p}^L(X_K)$	$\mu_{A_p}^S(X_K)$	$\mu_{A_p}^H(X_K)$

Tendo em conta os resultados apresentados acima, é possível sugerir o esquema geral de tomada de decisão multicritério em condições de incerteza de informação que modifica o esquema geral proposto em (Ekel, 2011; Ekel, Martini, Palhares, 2008) e, no caso geral, está associado às etapas seguintes:

- A primeira etapa consiste na construção de q matrizes de *payoff* (de acordo com o número de funções objetivo consideradas) para todas as combinações das alternativas de solução X_k , dadas e dos estados representativos da natureza dados Y_s , $s = 1, \dots, S$. Nesse ponto, não consideramos questões de seleção de estados representativos da natureza, que serão brevemente discutidas na próxima seção. Para construir matrizes de *payoff* é necessário resolver problemas multicritério S formalizados no âmbito de modelos $\langle X, F \rangle$. Ao resolvê-los é possível obter as alternativas de solução X_k , $k = 1, \dots, K$ (com $K \leq S$). Depois disso, X_k , $k = 1, \dots, K$ são substituídos em F_p , (X) , $p = 1, \dots, q$ por $Y_{s,s} = 1, \dots, S$. Essas substituições geram q matrizes de *payoff*.
- A segunda etapa está relacionada com a análise das matrizes de *payoff* obtidas. A execução dessa etapa baseia-se na abordagem apresentada neste artigo, nomeadamente considerar os critérios de escolha como funções objetivo. No entanto, a insuficiente capacidade de resolução da presente fase pode levar a soluções não únicas e essa circunstância exige a aplicação da terceira fase.
- A terceira etapa está associada à construção e análise de modelos $\langle X, R \rangle$ para a subsequente redução de regiões de incerteza de decisão. Como foi indicado acima, a utilização de modelos $\langle X, R \rangle$ permite levar em conta índices de caráter quantitativo e qualitativo (baseados no conhecimento, experiência e intuição dos especialistas envolvidos).

Tabela 12. Matriz de *payoff* agregada de estimativas de critérios de escolha

	$\mu_D^W(X_k)$	$\mu_D^L(X_k)$	$\mu_D^S(X_k)$	$\mu_D^H(X_k)$
X_1	$\mu_D^W(X_1)$	$\mu_D^L(X_1)$	$\mu_D^S(X_1)$	$\mu_D^H(X_1)$
...	...	...	...	...
X_k	$\mu_D^W(X_k)$	$\mu_D^L(X_k)$	$\mu_D^S(X_k)$	$\mu_D^H(X_k)$
...	...	...	...	...
X_K	$\mu_D^W(X_K)$	$\mu_D^L(X_K)$	$\mu_D^S(X_K)$	$\mu_D^H(X_K)$
	$\max_{1 \leq k \leq K} \mu_D^W(X_k)$	$\max_{1 \leq k \leq K} \mu_D^L(X_k)$	$\max_{1 \leq k \leq K} \mu_D^S(X_k)$	$\max_{1 \leq k \leq K} \mu_D^H(X_k)$

Tabela 13. Matriz modificada de estimativas de critérios de escolha para a primeira função objetivo

	$\mu_{A_p}^L(X_k)$
X_1	0.67
X_2	1.00
X_3	0
X_4	0.83

Tabela 14. Estimativas da matriz modificada de critérios de escolha para a segunda função objetivo

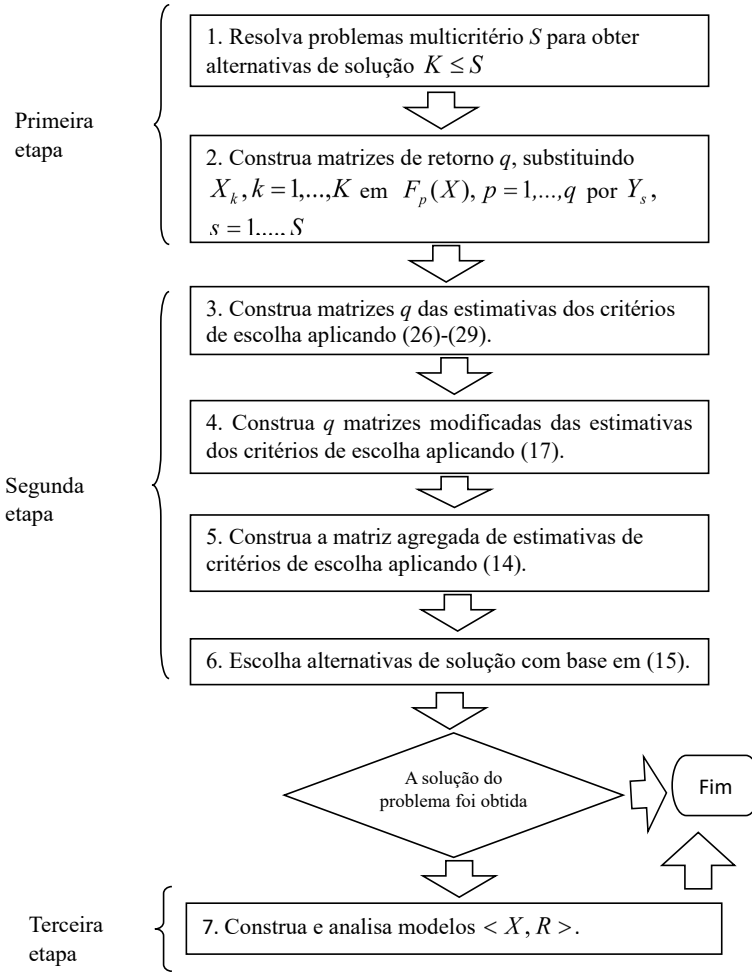
	$\mu_{A_p}^L(X_k)$
X_1	0.25
X_2	1.00
X_3	0.75
X_4	0

Tabela 15. Matriz agregada de estimativas de critérios de escolha

	$\mu_D^L(X_k)$
X_1	0.25
X_2	1.00
X_3	0
X_4	0

O fluxograma da Figura 1 ilustra o esquema geral.

Figura 1. Fluxograma do esquema geral de tomada de decisão multicritério sob incerteza de informação



4. Exemplo de aplicação

O exemplo abaixo detalha como realizar as duas primeiras etapas do esquema geral de tomada de decisão multicritério sob incerteza.

Considere o seguinte problema multiobjetivo (Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011) com coeficientes intervalares, presentes nas funções objetivo:

$$F_1(x) = [2.70, 3.30]x_1 + [11.70, 14.30]x_2 + [7.20, 8.80]x_3 \rightarrow \min \quad (25)$$

$$F_2(x) = [5.40, 6.60]x_1 + [3.60, 4.40]x_2 + [4.50, 5.50]x_3 \rightarrow \min \quad (26)$$

sujeito às seguintes restrições:

$$0 \leq x_1 \leq 10 \quad (27)$$

$$0 \leq x_2 \leq 12 \quad (28)$$

$$0 \leq x_3 \leq 14 \quad (29)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 30 \quad (30)$$

A primeira etapa do processo de tomada de decisão está associada à construção de duas matrizes de *payoff* para todas as combinações das alternativas de solução X_k , $k=1,\dots,K$ e dos estados representativos da natureza Y_s , $s=1,\dots,S$.

Aplicamos seqüências LP_t para gerar os estados representativos da natureza. Essas seqüências possuem características superiores de uniformidade entre outras seqüências uniformemente distribuídas (ver Sobol (1979) para mais detalhes e uma descrição de como construir seqüências LP_t).

Os resultados de Sobol (1979) permitem determinar pontos $Q_{s,s} = 1,\dots,S$ com coordenadas $q_{st}, t=1,\dots,T$, no hipercubo unitário Q^T correspondente. Observe que como (31) junto com (32) possuem seis coeficientes, defina $T=6$. Além disso, defina $S=7$. A Tabela 16 apresenta as coordenadas de $Q_{s,s} = 1,\dots,7$, para $t=1,\dots,6$, determinadas com base em Sobol (1979).

Tabela 16. Pontos das seqüências LP_t em Q^6

s	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$	$t=5$	$t=6$
1	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500
2	0.250	0.750	0.250	0.750	0.250	0.750
3	0.750	0.250	0.750	0.250	0.750	0.250
4	0.125	0.625	0.875	0.875	0.625	0.125
5	0.625	0.125	0.375	0.375	0.125	0.625
6	0.375	0.375	0.625	0.125	0.875	0.875
7	0.875	0.875	0.125	0.625	0.375	0.375

Em essência, a seleção de estados representativos da natureza é reduzida à seleção de pontos de uma seqüência Q^6 uniformemente distribuída e sua transformação no hipercubo C^6 definido pelos limites inferior c'_t e superior c''_t dos coeficientes correspondentes de (31) e (32). Levando isso em consideração, se os pontos com coordenadas $q_{st}, t=1,\dots,6$ formam uma seqüência uniformemente distribuída em Q^6 , então os pontos $C_{s,s}=1,\dots,7$, com as coordenadas expressas como:

$$c_{st} = c'_t + (c''_t - c'_t)q_{st}, \quad t=1,\dots,6 \quad (31)$$

formam uma seqüência uniformemente distribuída em C^6 que está incluída na Tabela 17.

Tabela 17. Estados representativos da natureza

s	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$	$t = 6$
1	3.00	13.00	8.00	6.00	4.00	5.00
2	2.85	13.65	7.60	6.30	3.80	5.25
3	3.15	12.35	8.40	5.70	4.20	4.75
4	2.93	12.68	8.20	5.55	4.30	5.38
5	2.78	13.33	8.60	6.45	4.10	4.63
6	3.08	12.03	7.80	5.85	3.70	5.13
7	3.23	13.98	7.40	6.15	3.90	4.88

As coordenadas dos pontos da Tabela 17 servem de base para a construção dos seguintes sete problemas multiobjetivos (de acordo com o número de estados da natureza):

$$F_1(x) = 3.00x_1 + 13.00x_2 + 8.00x_3 \rightarrow \min \quad (32)$$

$$F_2(x) = 6.00x_1 + 4.00x_2 + 5.00x_3 \rightarrow \min \quad (33)$$

$$F_1(x) = 2.85x_1 + 13.65x_2 + 7.60x_3 \rightarrow \min \quad (34)$$

$$F_2(x) = 6.30x_1 + 3.80x_2 + 5.25x_3 \rightarrow \min \quad (35)$$

$$F_1(x) = 3.15x_1 + 12.35x_2 + 8.40x_3 \rightarrow \min \quad (36)$$

$$F_2(x) = 5.70x_1 + 4.20x_2 + 4.75x_3 \rightarrow \min \quad (37)$$

$$F_1(x) = 2.93x_1 + 12.68x_2 + 8.20x_3 \rightarrow \min \quad (38)$$

$$F_2(x) = 5.55x_1 + 4.30x_2 + 5.38x_3 \rightarrow \min \quad (39)$$

$$F_1(x) = 2.78x_1 + 13.33x_2 + 8.60x_3 \rightarrow \min \quad (40)$$

$$F_2(x) = 6.45x_1 + 4.10x_2 + 4.63x_3 \rightarrow \min \quad (41)$$

$$F_1(x) = 3.08x_1 + 12.03x_2 + 7.80x_3 \rightarrow \min \quad (42)$$

$$F_2(x) = 5.85x_1 + 3.70x_2 + 5.13x_3 \rightarrow \min \quad (43)$$

$$F_1(x) = 3.23x_1 + 13.98x_2 + 7.40x_3 \rightarrow \min \quad (44)$$

$$F_2(x) = 6.15x_1 + 3.90x_2 + 4.88x_3 \rightarrow \min \quad (45)$$

que estão sujeitos às mesmas restrições dadas em (27)-(30).

Utilizando a abordagem Bellman-Zadeh para tomada de decisão em ambiente *fuzzy* para análise de modelos $\langle X, F \rangle$, podem-se obter as seguintes soluções para cada problema:

- $s = 1$: $x_1^0 = 7.00$, $x_2^0 = 9.00$, $x_3^0 = 14.00$ para (38) e (39);

- $s = 2$: $x_1^0 = 8.95$, $x_2^0 = 10.50$, $x_3^0 = 10.55$ para (40) e (41);
- $s = 3$: $x_1^0 = 7.00$, $x_2^0 = 9.00$, $x_3^0 = 14.00$ para (42) e (43);
- $s = 4$: $x_1^0 = 9.95$, $x_2^0 = 10.50$, $x_3^0 = 9.55$ para (44) e (45);
- $s = 5$: $x_1^0 = 7.00$, $x_2^0 = 9.00$, $x_3^0 = 14.00$ para (46) e (47);
- $s = 6$: $x_1^0 = 9.93$, $x_2^0 = 11.35$, $x_3^0 = 8.72$ para (48) e (49);
- $s = 7$: $x_1^0 = 7.00$, $x_2^0 = 9.00$, $x_3^0 = 14.00$ para (50) e (51).

Portanto, podemos formar as seguintes quatro alternativas de solução para o problema (31)-(36): $X_1 = (7.00, 9.00, 14.00)$, $X_2 = (8.95, 10.50, 110.55)$, $X_3 = (9.95, 10.50, 9.55)$, $X_4 = (9.93, 11.35, 8.72)$. Substituindo-as em (32), (34), (36), (38), (40), (42) e (44), podemos construir a matriz de *payoff* para a primeira função objetivo da Tabela 18. Por outro lado, ao substituí-los em (33), (35), (37), (39), (41), (43) e (45), podemos construir a matriz de *payoff* para a segunda função objetivo na Tabela 20.

A solução do problema monocritério (25), sujeito a (27)-(30), com base na análise da matriz de *payoff* dada na Tabela 18, gera a matriz correspondente das estimativas dos critérios de escolha apresentadas na Tabela 19.

Tabela 18. Matriz de *payoff* para a primeira função objetivo

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7
X_1	250.00	249.20	250.80	249.43	259.83	239.03	252.03
X_2	243.75	249.01	246.49	245.87	255.58	236.17	253.77
X_3	242.75	244.26	241.24	240.60	249.76	231.45	249.60
X_4	247.10	249.50	244.70	244.52	253.89	235.14	255.27

Tabela 19. Matriz de estimativas de critérios de escolha para a primeira função objetivo

	$F^W(X_k)$	$F^L(X_k)$	$F^S(X_k)$	$F^H(X_k)$
X_1	259.83	250.05	10.07	254.63
X_2	255.58	247.81	5.82	250.73
X_3	249.76	242.81	0.00	245.18
X_4	255.27	247.16	5.24	250.24
	249.76	242.81	0.00	245.18
	259.83	250.05	10.07	254.63

Se usarmos os quatro critérios de escolha (Wald, Laplace, Savage e Hurwicz) para analisar os dados da Tabela 19, segue-se que todos os critérios de escolha levam à mesma solução, ou seja, $X^W = X^L = X^S = X^H = \{X_3\}$ (para o critério de escolha de Hurwicz, conforme $\alpha = 0.75$ recomendado em Belyaev (1977)). Assim, a alternativa de solução pode ser X_3 selecionada como a solução do problema monocritério (25), sujeita a (26)-(30), com um alto grau de confiança.

A solução do problema de monocritério (26), sujeito a (26)-(30), com base na análise da matriz de *payoff* dada na Tabela 20, leva à matriz de estimativas de critérios de escolha apresentada na Tabela 21.

Tabela 20. Matriz de *payoff* para a segunda função objetivo

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7
X_1	148.00	151.80	144.20	152.87	146.87	146.07	146.47
X_2	148.45	151.67	145.23	151.58	149.62	145.33	147.48
X_3	149.45	152.72	146.18	151.75	151.44	146.05	148.75
X_4	148.58	151.47	145.69	150.83	150.96	144.82	147.89

Tabela 21. Matriz de estimativas de critérios de escolha para a segunda função objetivo

	$F^W(X_k)$	$F^L(X_k)$	$F^S(X_k)$	$F^H(X_k)$
X_1	152.87	148.04	2.04	150.70
X_2	151.67	148.48	2.75	150.06
X_3	152.72	149.48	4.57	151.05
X_4	151.47	148.61	4.09	149.81
	151.47	148.04	2.04	149.81
	152.87	149.48	4.57	151.05

Realizando a mesma análise para a Tabela 21, obtém-se: $X^W = \{X_4\}$, $X^L = \{X_1\}$, $X^S = \{X_1\}$, e $X^H = \{X_4\}$. Diferentemente do caso anterior, devem ser consideradas as alternativas de solução X_1 e X_4 para a segunda função objetivo. Formalmente, essas alternativas não podem ser distinguidas com base nas informações fornecidas na matriz de resultados da Tabela 20.

Lembre-se do problema descrito por (25)-(30). Observe que as informações da Tabela 19 permitem construir a matriz modificada das estimativas dos critérios de escolha para a primeira função objetivo dada na Tabela 22. A matriz modificada dos critérios de escolha para a segunda função objetivo, apresentada na Tabela 23, foi obtida em com base nas informações fornecidas na Tabela 21.

Tabela 22. Matriz modificada de estimativas de critérios de escolha para a primeira função objetivo

	$\mu_{A_1}^W(X_k)$	$\mu_{A_1}^L(X_k)$	$\mu_{A_1}^S(X_k)$	$\mu_{A_1}^H(X_k)$
X_1	0.00	0.00	0.00	0.00
X_2	0.42	0.31	0.42	0.41
X_3	1.00	1.00	1.00	1.00
X_4	0.45	0.40	0.48	0.46

Tabela 23. Matriz modificada de estimativas de critérios de escolha para a segunda função objetivo

	$\mu_{d_2}^W(X_k)$	$\mu_{d_2}^L(X_k)$	$\mu_{d_2}^S(X_k)$	$\mu_{d_2}^H(X_k)$
X_1	0.00	1.00	1.00	0.28
X_2	0.86	0.69	0.72	0.80
X_3	0.11	0.00	0.00	0.00
X_4	1.00	0.60	0.19	1.00

As matrizes modificadas das estimativas dos critérios de escolha resultam na construção da matriz de *payoff* agregada apresentada na Tabela 24.

Tabela 24. Matriz de retorno agregada de estimativas de critérios de escolha

	$\mu_D^W(X_k)$	$\mu_D^L(X_k)$	$\mu_D^S(X_k)$	$\mu_D^H(X_k)$
X_1	0.00	0.00	0.00	0.00
X_2	0.42	0.31	0.42	0.41
X_3	0.11	0.00	0.00	0.00
X_4	0.45	0.40	0.19	0.46

Observe que, nesse caso, a utilização dos critérios de escolha de Wald, Laplace e Hurwicz leva à mesma alternativa de solução: $X^W = X^L = X^H = \{X_4\}$. Por outro lado, o critério de Savage permite encontrar $X^S = \{X_2\}$. Assim, as alternativas de solução X_2 e X_4 são os resultados possíveis ao realizar a segunda etapa do esquema geral de tomada de decisão multicritério sob incerteza informacional. Observe que se a análise for realizada utilizando a generalização da abordagem clássica proposta em Ekel *et al.* (2011) e Ekel, Martini e Palhares (2008), as alternativas de solução são X_3 e X_4 (Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011). É evidente que X_2 e X_4 devem ser analisados sob o uso de modelos $\langle X, R \rangle$, ou seja, a terceira etapa do esquema geral de tomada de decisão multicritério sob incerteza de informação proposta.

5. Aplicações práticas

Os seguintes problemas de engenharia de potência foram resolvidos com o uso da metodologia proposta:

- alocação multicritério de escassez de potência e energia aplicada ao gerenciamento de carga em sistemas e subsistemas de potência;
- otimização multicritério da configuração de redes em sistemas de distribuição.

Como exemplo, considere o problema da alocação de energia e da escassez de energia. Sua solução em Berredo *et al.* (2011) baseia-se na alocação multicritério de recursos ou na sua escassez entre os consumidores (esses problemas são equivalentes do ponto de vista substancial, matemático e informacional). Isso permite considerar e

minimizar diversas implicações da alocação de energia e da escassez de energia e criar influências de incentivo para os consumidores (Berredo *et al.*, 2011).

A colocação do problema supõe a possibilidade de usar diversos tipos de funções objetivo definidas em uma região viável:

$$L = \{X \in R^n \mid 0 \leq x_i \leq A_i, \sum_{i=1}^n x_i = A\} \quad (46)$$

onde $X = (x_1, \dots, x_n)$ é um vetor de limitações (para o bem de nossas considerações) para os consumidores, A_i é o valor permitido de limitação para o i -ésimo consumidor, enquanto A é um valor total de limitações para todos os consumidores considerados nesse problema de planejamento.

A análise geral dos problemas de alocação de energia e de escassez de energia, dos sistemas de gestão econômica, incluindo a política fiscal, bem como da informação reportada disponível, permitiu a construção de um conjunto geral de objetivos para resolver esses problemas na declaração multicritério. A lista completa inclui 17 tipos de metas. Alguns deles, usados nesse exemplo, são apresentados a seguir:

1. Limitação primária de consumidores com menor custo de produção ou de serviços prestados em 1 kWh de energia consumida (conquista de queda mínima na produção total ou em determinados serviços);
2. Limitação primária de consumidores com maior nível de coeficiente de posse energética de trabalho sobre 1 kWh de energia consumida (conquista da redução máxima do número de trabalhadores, cuja produtividade e, conseqüentemente, salário é diminuída);
3. Limitação primária de consumidores com menor valor do coeficiente de demanda (limitação primária de consumidores com maiores possibilidades de produção fora do horário de pico);
4. Limitação primária de consumidores com menor duração de utilização de carga máxima em vinte e quatro horas (limitação primária de consumidores com maiores possibilidades de transferência de carga máxima no intervalo diário).

A consideração das metas indicadas em um problema com seis consumidores está associada à minimização de funções objetivo:

$$F_p(X) = \sum_{i=1}^6 c_{pi} x_i, \quad p = 1, 3, 4 \quad (47)$$

e maximizando uma função objetivo:

$$F_2(X) = \sum_{i=1}^6 c_{2i} x_i, \quad (48)$$

Considerando (46) com $A_1 = 16000$ kW, $A_2 = 6000$ kW, $A_3 = 4000$ kW, $A_4 = 7000$ kW, $A_5 = 19000$ kW, $A_6 = 7000$ kW e $A = 50000$ kW. Em (46)-(48), $x_i, i = 1, \dots, 6$ são limitações do fornecimento de energia aos consumidores.

Os coeficientes c_{pi} , $p = 1, 2, 3, 4$, $i = 1, \dots, 6$ são determinados por características específicas dos consumidores e são dados na Tabela 25 pelos intervalos correspondentes.

Tabela 25. Informações iniciais

i	1	2	3	4	5	6
$c_{1,i}$ R\$/kWh	[1.6;1.9]	[2.9;5.3]	[1.0;1.8]	[1.5;2.9]	[0.8;1.6]	[1.5;2.8]
$c_{2,i}$	[3.8;7.0]	[4.3;8.1]	[4.1;7.5]	[3.7;6.9]	[2.9;5.5]	[3.3;6.1]
$c_{3,i}$	[0.4;0.8]	[0.2;0.4]	[0.2;0.4]	[0.1;0.3]	[0.2;0.3]	[0.2;0.5]
$c_{4,i}$, hours	[10.7;19.9]	[12.0;22.4]	[14.8;27.4]	[12.9;24.0]	[12.2;22.6]	[13.7;25.5]

Para a solução do problema foram elaborados $S=13$ estados representativos da natureza aplicando as sequências LP_{τ} . A Tabela 26 apresenta as alternativas de solução para $Y_{s,s} = 1, \dots, 13$. A Tabela 27 mostra a matriz de *payoff* agregada das estimativas dos critérios de escolha. A utilização dos critérios de escolha de Wald, Laplace e Hurwicz conduz à mesma solução: $X^w = X^l = X^h = \{X_2\}$. Por outro lado, o critério de Savage encontra $X^s = \{X_3\}$. Assim, as alternativas de solução X_2 e X_3 (se a análise for baseada na generalização da abordagem clássica de Ekel *et al.* (2011) e Ekel, Martini e Palhares (2008), as alternativas de solução são X_2 e X_3) devem ser avaliadas através da terceira etapa do esquema geral de tomada de decisão multicritério sob incerteza. Contudo, vale ressaltar que aplicando as duas primeiras etapas do esquema geral, pode-se reduzir racionalmente o número de alternativas de solução de 13 para 2.

Tabela 26. Alternativas de solução

i	1	2	3	4	5	6
X_1	8686.60	5999.90	4000.00	50.40	18264.50	12998.60
X_2	10021.30	4859.50	4000.00	6974.30	18999.90	5145.00
X_3	9440.70	2685.20	3129.40	7000.00	13744.70	14000.00
X_4	11685.10	6000.00	4000.00	7000.00	19000.00	2314.90
X_5	9876.50	4278.70	4000.00	7000.00	18833.10	6011.70
X_6	10603.90	3208.30	4000.00	7000.00	19000.00	6187.80
X_7	8000.10	5999.90	4000.00	2707.00	19000.00	10293.00
X_8	8543.50	5455.30	2600.00	1053.40	18444.30	13903.50
X_9	9162.80	1419.90	3843.70	3166.90	19000.00	13406.70
X_{10}	13031.10	5105.70	4000.00	7000.00	19000.00	1863.20
X_{11}	6782.10	5969.00	4000.00	7000.00	17490.30	8758.60
X_{12}	10475.90	4497.20	4000.00	2679.20	18999.80	9347.90
X_{13}	8159.40	4855.00	2170.80	1818.40	19000.00	13996.40

Tabela 27. Matriz agregada das estimativas dos critérios de escolha

i	$\mu_D^W(X_k)$	$\mu_D^L(X_k)$	$\mu_D^S(X_k)$	$\mu_D^H(X_k)$
X_1	0.00	0.10	0.24	0.06
X_2	0.50	0.50	0.06	0.51
X_3	0.05	0.00	0.33	0.00
X_4	0.22	0.24	0.17	0.24
X_5	0.49	0.49	0.03	0.50
X_6	0.33	0.40	0.00	0.36
X_7	0.11	0.22	0.24	0.14
X_8	0.00	0.15	0.16	0.04
X_9	0.00	0.00	0.00	0.03
X_{10}	0.00	0.00	0.00	0.00
X_{11}	0.08	0.00	0.00	0.00
X_{12}	0.09	0.05	0.20	0.05
X_{13}	0.07	0.17	0.10	0.00

6. Conclusões

Neste capítulo apresentamos o raciocínio para modificar a generalização, originalmente proposta em Ekel, Martini e Palhares (2008), da abordagem clássica para lidar com a incerteza da informação na tomada de decisão monocritério para problemas multicritério. Essa modificação baseia-se numa metodologia que permite considerar simultaneamente os critérios de escolha da abordagem clássica para considerar a incerteza da informação como funções objetivo num quadro de modelos multiobjectivo (modelos $\langle X, F \rangle$). A principal contribuição dessa modificação é evitar a obtenção de soluções contraditórias não pertencentes ao conjunto de Pareto (a elaboração de tais soluções viola o conceito básico de tomada de decisão multicritério).

Foi proposto um esquema geral de tomada de decisão multicritério sob incerteza de informação. Esse esquema apresenta três etapas: a primeira consiste na construção de matrizes de *payoff*, que envolve a solução de problemas multicritério formalizados no âmbito de modelos $\langle X, F \rangle$; a segunda etapa está relacionada à proposta de modificação da generalização da abordagem clássica considerando os critérios de escolha como funções objetivo; e a terceira etapa (que é realizada apenas se na segunda etapa forem obtidas soluções não únicas) está associada à construção e análise de modelos $\langle X, R \rangle$. Esse esquema geral permite utilizar informações quantitativas disponíveis para reduzir as regiões de incerteza de decisão. Caso não sejam obtidas soluções não únicas, o esquema pressupõe a aplicação de informações qualitativas baseadas no conhecimento, experiência e intuição dos especialistas envolvidos. Um exemplo numérico simples ilustra, passo a passo, as duas primeiras etapas do esquema geral. O esquema geral também foi aplicado

em um problema real de alocação multicritério de energia e escassez de energia, aplicado ao gerenciamento de carga em sistemas e subsistemas de potência.

No presente trabalho foram analisados e aplicados os critérios de escolha de Wald, Laplace, Savage e Hurwicz. Tendo isto em conta, uma das futuras direções de investigação sobre tomada de decisão multicritério em condições de incerteza está associada à utilização de outros critérios de escolha para proporcionar mais flexibilidade na seleção de procedimentos de solução aos procedimentos que apoiam a escolha da solução pelo DM.

Referências

- ANTUNES, C. H.; DIAS, L. C. Editorial: managing uncertainty in decision support models. **European Journal of Operational Research**, v. 181, n. 3, p. 1425-1426, 2007.
- BELLMAN, R. E.; ZADEH, L. A. Decision-making in a fuzzy environment. **Management Science**, v. 17, n. 4, p. 141-164, 1970.
- BELYAEV, L. S. **A practical approach to choosing alternative solutions to complex optimization problems under uncertainty**. Laxenburg: International Institute for Applied Systems Analysis, 1977.
- BERREDO, R. C. *et al.* Decision making in fuzzy environment and multicriteria power engineering problems. **International Journal of Electric Power and Energy Systems**, v. 33, n. 3, p. 623-632, Mar. 2011.
- CANHA, L. *et al.* Models and methods of decision making in fuzzy environment and their applications to power engineering problems. **Numerical Linear Algebra with Applications**, v. 14, n. 4, p. 369-390, May 2007.
- COELHO, C. A. C. Evolutionary multi-objective optimization: Critical review. *In*: SARKER, R.; MOHAMMADIAN, M.; YAO, X. (ed.). **Evolutionary optimization**. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2005. p. 117-146.
- GRASSMAN, W. K. **Stochastic systems for management**. Amsterdam: North-Holland, 1981.
- DURBACH, I. N.; STEWART, T. J. Modeling uncertainty in multi-criteria decision analysis. **European Journal of Operational Research**, v. 223, n. 1, p. 1-14, Nov. 2012.
- EHRGOTT, M. **Multicriteria optimization**. Berlin: Springer-Verlag, 2005.
- EISELF, H. A.; MARIANOV, V. Multicriteria decision making under uncertainty: a visual approach. **International Transactions in Operational Research**, v. 21, n. 4, p. 525-540, Jul. 2014.
- EKEL, P. Ya. Approach to decision making in fuzzy environment. **Computers and Mathematics with Applications**, v. 37, n. 4/5, p. 59-71, Feb./Mar. 1999.
- EKEL, P. Ya. Fuzzy sets and models of decision making. **Computers and Mathematics with Applications**, v. 44, n. 7, p. 863-875, Oct. 2002.

- EKEL, P. Ya.; GALPERIN, E. A. Box-triangular multiobjective linear programs for resource allocation with application to load management and energy market problems. **Mathematical and Computer Modelling**, v. 37, n. 1/2, p. 1-17, Jan. 2003.
- EKEL, P. Ya. *et al.* Sensitivity and functionally oriented models for power system planning, operation, and control. **International Journal of Electric Power and Energy Systems**, v. 45, n. 1, p. 489-500, Feb. 2013.
- EKEL, P. Ya. *et al.* Multicriteria analysis based on constructing payoff matrices and applying methods of decision making in fuzzy environment. **Optimization and Engineering**, v. 12, p. 5-29, Mar. 2011.
- EKEL, P. Ya.; MARTINI, J. S. C.; PALHARES, R. M. Multicriteria analysis in decision making under information uncertainty. **Applied Mathematics and Computation**, v. 200, n. 2, p. 501-516, Jul. 2008.
- EKEL, P. Ya.; SCHUFFNER NETO, F. H. Algorithms of discrete optimization and their application to problems with fuzzy coefficients. **Information Sciences**, v. 176, n. 19, p. 2846-2868, 2006.
- FRENCH, S. Uncertainty and imprecision: modelling and analysis. **Journal of the Operational Research Society**, v. 7, p. 70-79, 1995.
- GASPARS-WIELOCH, H. The use of a modification of the Hurwicz's decision rule in multicriteria decision making under complete uncertainty. **Business, Management and Education**, v. 12, n. 2, p. 283-302, 2014.
- HERRERA-VIEDMA, E. *et al.* A review of soft consensus models in a fuzzy environment. **Information Fusion**, v. 17, p. 4-13, May 2014.
- HERRERA-VIEDMA, E.; HERRERA, F.; CHICLANA, F. A consensus model for multiperson decision making with different preference structures. **IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics – Part A: Systems and Humans**, v. 32, n. 3, p. 394-402, May 2002.
- HODGES Jr., J. L.; LEHMANN, E. L. The use of previous experience in reaching statistical decisions. **Annals of Mathematical Statistics**, v. 23, n. 3, p. 396-407, Sep. 1952.
- KUCHTA, D. Choice of the best alternative in case of a continuous set of states of nature – application of fuzzy numbers. **Fuzzy Optimization and Decision Making**, v. 6, p. 173-178, 2007.
- LIAO, H. C.; XU, Z. S. Multi-criteria decision making with intuitionistic fuzzy PROMETHEE. **Journal of Intelligent & Fuzzy Systems**, v. 27, n. 4, p. 1703-1717, 2014.
- LIAO, H.C.; XU, Z. S.; ZENG, X. J. Distance and similarity measures for hesitant fuzzy linguistic term sets and their application in multi-criteria decision making. **Information Sciences**, v. 271, p. 125-142, Jul. 2014.

LUCE, R. D.; RAIFFA, H. **Games and decisions**. New York: John Wiley & Sons, 1957.

MA, X. Y. *et al.* Scenario-based multiobjective decision-making of optimal access point for wind power transmission corridor in the load centers. *IEEE Transactions on Sustainable Energy*, v. 4, n. 1, p. 229-239, Jan. 2013.

MIETTINEN, K. M. **Nonlinear multiobjective optimization**. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1999.

PARETO, V. **Cours d'économie politique**. Lousanne; Lousanne Rouge, 1886.

PARREIRAS, R. O. *et al.* A flexible consensus scheme for multicriteria group decision making under linguistic assessments. **Information Sciences**, v. 180, n. 7, p. 1075-1089, Apr. 2010.

PEDRYCZ, W.; EKEL, P.; PARREIRAS, R. **Fuzzy multicriteria decision-making: models, methods, and applications**. Chichester: John Wiley & Sons, 2011.

PEDRYCZ, W.; GOMIDE, F. **An introduction to fuzzy sets: analysis and design**. Cambridge: MIT Press, 1998.

RAIFFA, H. **Decision analysis**. Reading: Addison-Wesley, 1968.

RAO, S. **Engineering optimization**. New York: John Wiley & Sons, 1996.

ROTTKEMPER, B.; FISCHER, K. Decision making in humanitarian logistics: a multi-objective optimization model for relocating relief goods during disaster recovery operations. *In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON INFORMATION SYSTEMS FOR CRISIS RESPONSE AND MANAGEMENT*, 10., 2013, Baden-Baden. Editors T. Comes *et al.* **Proceedings** [...]. Germany: Karlsruhe Institute of Technology, 2013. p. 647-657.

STEWART, T. Dealing with uncertainties in MCDA. *In: FIGUEIRA, J.; GRECO, S.; Ehrgott, M. (ed.). Multiple criteria decision analysis: state of the art annotated surveys, international series in operations research and management science*. New York: Springer, 2005. p. 445-470.

SOBOL, I. M. On the systematic search in a hypercube. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 16, n. 1, p. 790-793, 1979.

TRUKHAEV, R. I. **Models of decision making in conditions of uncertainty**. Moscow: Nauka, 1981. (In Russian).

WEN, M.; IWAMURA, K. Fuzzy facility location-allocation problem under the Hurwicz criterion. **European Journal of Operational Research**, v. 184, n. 2, p. 627-635, Jan. 2008.

XU, Z. **Uncertain multiple attribute decision making: methods and applications**. Berlin: Springer-Verlag, 2014.

YAGER, R. R. Fuzzy set methods for uncertainty representation in risky financial decisions. *In: IEEE/IAFE CONFERENCE ON COMPUTATIONAL INTELLIGENCE*

FOR FINANCIAL ENGINEERING, 1996, New York. **Proceedings** [...]. US: IEEE, 1996. p. 59-65.

ZIMMERMANN, H. J. **Fuzzy set theory and its application**. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1990.

ZIMMERMANN, H. An application-oriented view of modeling uncertainty. **European Journal of Operational Research**, v. 122, n.2, p. 190–198, Apr. 2000.

Tomada de decisão multiobjetivo e multiatributo em um ambiente *fuzzy* e suas aplicações em engenharia de potência³

Petr Iakovlevitch Ekel, Illya Kokshenev, Roberta Oliveira Parreiras, Witold Pedrycz, Joel Pereira Júnior, Henrique Silva Schuffner

1. Introdução

Vários tipos de incerteza (Ekel, 1999; French, 1995; Stewart, 2005) são comumente encontrados em problemas de otimização e tomada de decisão relacionados ao projeto, planejamento, operação e controle de sistemas complexos. Essa situação deve ser considerada natural e inevitável. Considerando isto, importa referir que a incorporação do fator da incerteza na construção de modelos matemáticos serve de veículo para aumentar a sua adequação e, conseqüentemente, a credibilidade e eficiência factível das decisões baseadas na sua análise. Como meio adequado para essa incorporação pode servir o uso da teoria dos conjuntos *fuzzy* (Pereira Jr. *et al.*, 2015; Zimmermann, 2001). A sua utilização em problemas de caráter de otimização oferece vantagens tanto de natureza fundamental (possibilidade de obter validamente soluções mais eficazes e menos “cautelosas”), como de considerar simultaneamente diferentes manifestações do fator de incerteza (Ekel, 1999; Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011) e como de caráter computacional (Ekel, 2002; Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011).

Durbach e Stewart (2012) e Stewart (2005) classificam as incertezas internas (relacionadas aos valores e julgamentos do tomador de decisão (DM)) e as incertezas externas (definidas por condições ambientais que estão além do controle do tomador de decisão). Este capítulo trata de ambos os tipos de incerteza em problemas de caráter multicritério, que estão associados à chamada incerteza de objetivos (Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011). Alguns pesquisadores que trabalham nas áreas da pesquisa operacional e análise de sistemas concordam que, do ponto de vista geral, esse tipo de incerteza é o mais difícil de ultrapassar porque “simplesmente não sabemos o que queremos”. Na realidade, esse tipo de incerteza não pode ser efetivamente captado apenas com base na aplicação de modelos formais, pois por vezes as únicas fontes de informação são os indivíduos que tomam as decisões.

É possível identificar duas grandes classes de situações (Ekel, 2002; Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011) que requerem a utilização de uma abordagem multicritério:

- a primeira classe está associada a problemas cujas conseqüências da solução não podem ser estimadas com a utilização de um único critério: esses problemas estão associados à análise de modelos que incluem índices econômicos e físicos (quando as alternativas não podem ser reduzidas a uma forma comparável) e também pela necessidade de considerar índices cujas estimativas de custos são difíceis ou impossíveis (por exemplo, muitos problemas de engenharia energética

³ **Reconhecimento:** A versão de registro deste artigo está publicada na *Information Sciences*, e está disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.ins.2016.04.030>.

EKEL, P. *et al.* Multiobjective and multiattribute decision making in a fuzzy environment and their power engineering applications. *Information Sciences*, v. 361/362, 100-119, Sep. 2016.

devem ser considerados com base em critérios de caráter tecnológico, econômico, ecológico e social);

- a segunda classe está relacionada com problemas que podem ser resolvidos com base num único critério (ou vários critérios). No entanto, se a incerteza da informação não permite derivar soluções únicas, é possível reduzir esses problemas à tomada de decisão multicritério através da aplicação de critérios adicionais, incluindo aqueles de caráter qualitativo, cuja utilização é baseada no conhecimento, experiência e intuição de especialistas envolvidos.

Tendo isso em conta, é necessário distinguir dois tipos de critérios: objetivos e atributos. Dessa forma, problemas de tomada de decisão multicritério podem ser classificados em duas grandes classes (Hwang; Masud, 1979; Hwang; Yoon, 1981):

- tomada de decisão multiobjetivo;
- tomada de decisões multiatributos.

Geralmente, a tomada de decisão multiobjetivo é conhecida como o tipo contínuo de tomada de decisão multicritério e suas principais características são que o tomador de decisão precisa atingir múltiplos objetivos enquanto esses objetivos são não comensuráveis e conflitantes entre si. Um modelo de tomada de decisão multiobjetivo inclui um vetor de variáveis de decisão, funções objetivo que descrevem os objetivos e restrições. O tomador de decisão tenta maximizar ou minimizar as funções objetivo.

Ao mesmo tempo, a tomada de decisão multiatributo está relacionada à tomada de decisão de preferências (isto é, comparação, escolha, priorização e/ou ordenação) sobre as alternativas disponíveis que são caracterizadas por múltiplos atributos, geralmente conflitantes. A principal peculiaridade dos problemas de tomada de decisão multiatributo é que geralmente há um número limitado de alternativas pré-determinadas, que estão associadas a um nível de cumprimento dos atributos. Com base nos atributos, a decisão final será tomada.

De acordo com essa classificação, podem ser construídas duas classes de modelos, correspondentes a duas classes de situações, que requerem a utilização de uma abordagem multicritério acima indicada: modelos $\langle X, F \rangle$ (como modelos multiobjetivos) e modelos $\langle X, R \rangle$ (como modelos multiatributos). O presente trabalho descreve brevemente esses modelos, bem como métodos para sua análise, baseados na aplicação da abordagem Bellman-Zadeh à tomada de decisão em um ambiente *fuzzy* e na utilização de técnicas de modelagem de preferências *fuzzy*, respectivamente. A consideração conjunta de modelos $\langle X, F \rangle$ e modelos $\langle X, R \rangle$ justifica-se, antes de tudo, do ponto de vista substancial. Em particular, em qualquer tipo das nossas atividades, por exemplo, no planejamento (estratégico, de inovação, de novos negócios, P&D) surgem sempre duas questões fundamentais: “o que fazer?” e “como fazer?”. As respostas à primeira questão fundamental podem ser elaboradas através da construção e análise de modelos $\langle X, R \rangle$. Ao mesmo tempo, a construção e análise de modelos $\langle X, F \rangle$ auxiliam na resposta à segunda questão fundamental.

Além disso, a análise de modelos $\langle X, R \rangle$ e modelos $\langle X, F \rangle$ serve como parte de um esquema geral para a tomada de decisão multicritério sob condições de incerteza,

discutido abaixo. Esse esquema está associado a uma generalização da abordagem clássica para considerar a incerteza da informação para problemas multicritério, baseada na análise de agregações especiais de matrizes de *payoff*. Sua característica importante é usar ao máximo as informações quantitativas disponíveis para reduzir regiões de incerteza de decisão. Se a capacidade de resolução de problemas relacionados com o processamento de informação quantitativa não permite obter soluções únicas, o esquema geral pressupõe a utilização de informação qualitativa baseada no conhecimento, experiência e intuição dos especialistas envolvidos no processo de tomada de decisão.

Neste capítulo, é descrita a experiência dos autores na utilização dos resultados indicados para resolução de amplas classes de problemas de planejamento e operação de sistemas de potência. Essa experiência demonstra de forma convincente as vantagens da aplicação da matemática *fuzzy*, incluindo a sua combinação com outro ramo da matemática da incerteza, para resolver problemas de engenharia de potência sob diferentes pontos de vista.

Levando em consideração o exposto, o restante do capítulo está organizado da seguinte forma. A Seção 2 é dedicada à análise de modelos $\langle X, F \rangle$, incluindo modelos de alocação multiobjetivo de recursos. As questões relacionadas com a criação e resolução de problemas multiatributos no âmbito de modelos $\langle X, R \rangle$ são consideradas na Seção 3. O esquema geral da tomada de decisão multicritério sob condições de incerteza que integra a análise de modelos $\langle X, F \rangle$ e modelos $\langle X, R \rangle$ com uma generalização da abordagem clássica para considerar o a incerteza da informação para problemas multicritério é um assunto da Seção 4. As questões de utilização de modelos $\langle X, F \rangle$ e métodos de sua análise para resolver problemas de planejamento e operação de sistemas de potência são consideradas na Seção 5. A aplicação de modelos $\langle X, R \rangle$ a problemas de engenharia de potência é um assunto de Seção 6. Por fim, as conclusões do presente capítulo são destacadas na Seção 7.

2. Modelos $\langle X, F \rangle$ e sua análise

Na análise de modelos $\langle X, F \rangle$, é considerado um vetor de funções objetivo $F(X) = \{F_1(X), \dots, F_p(X), \dots, F_q(X)\}$, e o problema está associado à otimização simultânea de todas as funções objetivo, ou seja,

$$F_p(X) \rightarrow \text{extr}, \quad p = 1, \dots, q \quad (1)$$

onde L é uma região viável em $\mathbf{R}^n$.

A etapa formal na análise de (1) é a determinação de um conjunto de soluções ótimas de Pareto (Ehrgott, 2005; Hwang; Masud, 1979); o conceito correspondente de otimalidade foi proposto por F. Y. Edgeworth (1881) e generalizado por V. Pareto (1886). Essa etapa é útil; no entanto, não permite obter soluções únicas. É necessário escolher uma solução de Pareto específica com base nas informações fornecidas pelo tomador de decisão. Existem três abordagens para usar essas informações (Coelho, 2005; Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011): *a priori*, *a posteriori* e adaptativa. Ao aplicar o último, o procedimento de melhoria sucessiva da qualidade da solução é realizado como transições

da decisão na etapa α para a decisão na etapa considerando informações do tomador de decisão.

Na solução de problemas multiobjetivos, é necessário elaborar respostas a questões específicas relacionadas à normalização de funções objetivo, à escolha de princípios de otimalidade e à consideração de prioridades de funções objetivo. A resolução dessas questões e, consequentemente, o desenvolvimento de métodos multiobjetivos, caminham em diversas direções (por exemplo, (Ehrgott, 2005; Hwang; Masud, 1979; Saadi-Nezhad; Shahnazari-Shahrezaei, 2013): métodos de escalarização; métodos baseados na colocação de restrições em funções objetivo, incluindo técnicas lexicográficas; métodos de programação de metas e de critério global; métodos baseados na utilização do princípio do resultado garantido. Sem discutir os pontos fortes e fracos dessas direções, é necessário indicar dois pontos fundamentais.

O primeiro ponto está associado à capacidade dos métodos baseados na colocação de restrições em níveis de funções objetivo e métodos de programação de metas em produzir soluções que não são ótimas de Pareto. Isso viola o conceito básico de tomada de decisão multiobjetivo.

O segundo ponto é a qualidade da solução. É considerada alta se os níveis de satisfação dos objetivos são iguais ou próximos entre si (dando origem às chamadas soluções harmoniosas) quando os níveis de importância das funções objetivo são iguais (Ekel, 2002). Não é difícil estender esse conceito para o caso em que os níveis de importância das funções objetivo são diferentes: as soluções devem ser harmoniosas considerando os fatores de importância correspondentes (Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011). Considerando isso, deve-se registrar a validade e a conveniência da orientação relacionada ao princípio do resultado garantido (Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011). Outras direções podem levar a soluções com altos níveis de satisfação de alguns objetivos que são alcançados por conta de baixos níveis de satisfação de alguns outros objetivos. Essa situação poderia ser completamente inaceitável (Ekel, 2002; Ekel; Galperin, 2003).

A falta de clareza do conceito de “solução ótima” é a complexidade metodológica básica na resolução de problemas multiobjetivos. Ao aplicar a abordagem Bellman-Zadeh à tomada de decisão em um ambiente *fuzzy* (Bellman; Zadeh, 1970; Pedrycz; Gomide, 1998; Zimmermann, 2001) para resolver problemas multiobjetivos, esse conceito é definido com razoável validade: o grau máximo de implementação dos objetivos serve como critério de otimalidade. Isso obedece ao princípio do resultado garantido e proporciona linhas construtivas na obtenção de soluções harmoniosas. A aplicação da modificação da abordagem Bellman-Zadeh permite realizar um método rigoroso (do ponto de vista de obtenção de soluções $X_\alpha^0 \in \Omega \subseteq L$) e computacionalmente eficaz de análise de modelos multiobjetivos (Ekel, 2002; Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011). A sua utilização permite também preservar uma medida natural de incerteza na tomada de decisões e ter em conta índices, critérios e restrições de caráter qualitativo.

2.1. Abordagem de Bellman-Zadeh para tomada de decisão em um ambiente fuzzy aplicada a problemas multiobjetivos

Ao aplicar a abordagem de Bellman-Zadeh à tomada de decisão em um ambiente fuzzy para análise de problemas multiobjetivos, cada função objetivo $F_p(X)$ é substituída por uma função objetivo fuzzy ou um conjunto fuzzy $A_p = \{X, \mu_{A_p}(X)\}$, $X \in L$ (Pedrycz; Gomide, 1998; Zimmermann, 2001). Sua disponibilidade permite construir uma solução fuzzy $D = \bigcap_{p=1}^q A_p$ com uma função de pertinência

$$\mu_D(X) = \bigwedge_{p=1}^q \mu_{A_p}(X) = \min_{p=1,2,\dots,q} \mu_{A_p}(X), \quad X \in L. \quad (2)$$

A sua utilização permite obter uma solução que proporciona

$$\max \mu_D(X) = \max_{X \in L} \min_{p=1,2,\dots,q} \mu_{A_p}(X). \quad (3)$$

Assim, o problema (1) é reduzido a uma busca por

$$X^0 = \arg \max_{X \in L} \min_{p=1,2,\dots,q} \mu_{A_p}(X). \quad (4)$$

A solução (4) requer a disponibilidade de funções de pertinência $\mu_{A_p}(X)$, $p = 1, 2, \dots, q$ que reflitam um grau de alcance de ótimos “próprios” por $F_p(X)$, $X \in L$, $p = 1, \dots, q$. Como é mostrado em Pedrycz; Ekel; Parreiras (2011), é racional utilizar

$$\mu_{A_p}(X) = \left[\frac{F_p(X) - \min_{X \in L} F_p(X)}{\max_{X \in L} F_p(X) - \min_{X \in L} F_p(X)} \right]^{\lambda_p} \quad (5)$$

para funções objetivo maximizadas e

$$\mu_{A_p}(X) = \left[\frac{\max_{X \in L} F_p(X) - F_p(X)}{\max_{X \in L} F_p(X) - \min_{X \in L} F_p(X)} \right]^{\lambda_p} \quad (6)$$

para funções objetivo minimizadas.

Em (5) e (6), encontram-se fatores de importância λ_p , $p = 1, \dots, q$ (que não necessitam necessariamente de ser normalizados) para as funções objetivo correspondentes.

A construção de (5) ou (6) para todas as funções objetivo requer a solução de problemas

$$F_p(X) \rightarrow \min_{X \in L}, \quad p = 1, \dots, q \quad (7)$$

e

$$F_p(X) \rightarrow \max_{X \in L}, \quad p = 1, \dots, q. \quad (8)$$

Assim, a solução de (1) exige análise dos $2q + 1$ problemas (7), (8) e (3), respectivamente.

Como X^0 deve pertencer a $\Omega \subseteq L$, é necessário construir:

$$\bar{\mu}_D(X) = \bigwedge_{p=1}^q \mu_{A_p}(X) \wedge \mu_\pi(X) = \min \left\{ \min_{p=1,2,\dots,q} \mu_{A_p}(X), \mu_\pi(X) \right\} \quad (9)$$

onde $\mu_\pi(X) = 1$ se $X \in \Omega$ e $\mu_\pi(X) = 0$ se $X \notin \Omega$.

Por fim, a existência de condições adicionais (índices, critérios e/ou restrições) de caráter qualitativo, definidas por variáveis linguísticas (Pedrycz; Gomide, 1998; Zimmermann, 2001), reduz (4) a

$$X^0 = \arg \max_{X \in L} \min_{p=1,2,\dots,q+s} \mu_{A_p}(X) \quad (10)$$

onde $\mu_{A_p}(X)$, $X \in L$, $p = q + 1, q + 2, \dots, s$ estão as funções de pertinência de valores *fuzzy* de variáveis linguísticas que refletem as condições adicionais.

Há alguma justificativa teórica por trás da validade da aplicação do operador min em (2)-(4), por exemplo, Bellman e Giertz (1974). Considerando isso, é necessário observar que existem muitas famílias de operadores de agregação que podem ser utilizadas no lugar do operador min. É possível generalizar (2) da seguinte forma:

$$\mu_D(X) = \text{agg}(\mu_{A_1}(X), \mu_{A_2}(X), \dots, \mu_{A_q}(X)), \quad X \in L. \quad (11)$$

Apesar de algumas propriedades desses operadores estarem estabelecidas, não existe uma interpretação clara e intuitivamente apelativa. Da mesma forma, falta uma interpretação unificadora dos próprios operadores (Beliakov; Warren, 2001). Surge uma questão importante: entre muitos tipos de operadores de agregação, como selecionar aquele que é adequado para um problema específico? Embora alguns critérios de seleção tenham sido sugeridos em Zimmermann (2001), por exemplo, a maioria das investigações concentra-se na escolha dos operadores com base em algumas evidências experimentais disponíveis. Assim, a seleção dos operadores é, em grande medida, baseada na experiência. Considerando isso, discutimos a seguir um exemplo que mostra o uso do operador min, bem como do operador produto (que pode ser considerado como parte de uma família de operadores de norma t, por exemplo Yager (1988), e encontrou uma posição visível em problemas de tomada de decisão). Utilizando o operador produto, é possível reduzir (4) à seguinte forma:

$$X^0 = \arg \max_{X \in L} \prod_{p=1}^q \mu_{A_p}(X). \quad (12)$$

2.2. Alocação multiobjetivo de recursos

Os resultados apresentados acima foram utilizados para resolver diversas classes de problemas de engenharia de potência, discutidos a seguir. São também aplicáveis para resolver um problema geral de alocação multiobjetivo de recursos (financeiros, humanos, logísticos etc.) ou de seus déficits (esses problemas são equivalentes dos pontos de vista conceitual e matemático) entre “consumidores” (ações estratégicas, inovação projetos, projetos de novos negócios, projetos de pesquisa e desenvolvimento etc.). Esse problema é típico de qualquer tipo de planejamento (estratégico, inovação, novos negócios, pesquisa e desenvolvimento, planejamento). Sua afirmação supõe a possibilidade de utilizar diversos tipos de funções objetivo em (1) definidas em uma região viável

$$L = \{X \in R^n \mid 0 \leq x_i \leq A_i, \sum_{i=1}^n x_i = A\} \quad (13)$$

onde $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ é um vetor de limitações para os consumidores, A_i é o valor permitido de limitação para o i -ésimo consumidor, A é um valor total de limitações para todos os consumidores considerados no problema de planejamento ou controle.

Para descrever um esquema geral Pedrycz, Ekel e Parreiras (2011) para resolver o problema formalizado pelos modelos (1) e (13), é conveniente introduzir uma variável linguística Q - limitação ao consumidor para fornecer ao tomador de decisão a possibilidade de considerar condições que são difíceis de formalizar. Além disso, se a solução X_α^0 com $\mu_{A_p}(X_\alpha^0)$, $p = 1, 2, \dots, q$ não for satisfatória, o tomador de decisão tem que ter a possibilidade de corrigi-la, passando a $X_{\alpha+1}^0$, alterando a importância de uma ou mais funções objetivo. Considerando isso, o esquema geral pressupõe a disponibilidade de procedimentos para a construção de um conjunto de termos $T(Q)$ da variável linguística e funções de pertinência para seus valores *fuzzy*, bem como para a construção e correção de um vetor de fatores de importância $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q)$.

Um esquema geral para resolver o problema descrito por (1) e (13), que foi utilizado para implementar um sistema adaptativo interativo de tomada de decisão AIDMS1, está associado à seguinte sequência de passos:

1. Solução de (7) e (8) para obter X_p^0 , $p = 1, 2, \dots, q$ e X_p^{00} , $p = 1, 2, \dots, q$, respectivamente.
2. Construção das funções de pertinência expressas por (5) ou (6).
3. Construção de um vector inicial $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q)$.
4. Análise da disponibilidade das condições iniciais definidas pela variável linguística Q . Se essas condições não estiverem disponíveis, vá para o Passo 8; caso contrário, vá para o Passo 5.
5. Verificação da compatibilidade das condições iniciais e, se necessário, sua correção.
6. Solução de (3) com o objetivo de obter X_α^0 definida por (10).
7. Análise da solução atual X_α^0 . Se o tomador de decisão estiver satisfeito com X_α^0 , vá para o Passo 10; caso contrário, vá para o Passo 8, executando $\alpha = \alpha + 1$.

8. Correção do vetor $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q)$.
9. Inserção de condições adicionais definidas pelas variáveis linguísticas; em seguida, vá para o Passo 5.
10. Conclusão da computação porque a solução foi obtida.

As principais funções de um núcleo computacional do AIDMS1 estão associadas à obtenção de X_p^0 , $p = 1, 2, \dots, q$ e X_p^{00} , $p = 1, 2, \dots, q$ e, que são produzidos pela resolução dos problemas (7) e (8) e pela obtenção X^0 de acordo com (10). A solução dos problemas (7) e (8) é bastante simples. A maximização de (2) é baseada em uma busca não local que surge como uma modificação do método “long Valley” de Gelfand e Tsetlin (Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011). O início dessa busca a partir de uma das soluções localmente ótimas X_p^0 (para funções objetivo minimizadas) ou X_p^{00} (para funções objetivo maximizadas), garante a obtenção de soluções harmoniosas pertencentes ao conjunto de Pareto. Isso elimina a necessidade de realizar uma etapa complicada de construção do conjunto de Pareto e abre a possibilidade real de utilização da abordagem multicritério em problemas de planejamento, operação e controle de curto prazo.

3. Modelos $\langle X, R \rangle$ e suas análises

Tal como foi indicado na Seção 1, a segunda grande classe de situações que requerem a aplicação da abordagem multicritério está associada a problemas que podem ser resolvidos com base num único critério ou em vários critérios; contudo, se a incerteza da informação não permite derivar soluções únicas, é possível resolver estes problemas, utilizando critérios adicionais. Para ilustrar, podemos considerar problemas com coeficientes difusos.

3.1. Problemas com coeficientes *fuzzy*

Embora existam diversas formulações de problemas de otimização com imprecisão (por exemplo, Delgado (1994) e Orlovski (1981), na opinião de Orlovski (1981) e Pedrycz e Gomide (1998), problemas com coeficientes *fuzzy* em funções objetivo e restrições devem ser considerados como uma classe geral de problemas de programação matemática *fuzzy*. Eles podem ser formulados da seguinte forma:

$$\text{maximize } F(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (14)$$

sujeito a restrições

$$G_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \subseteq B_j, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (15)$$

onde a função objetivo (14) e as restrições (15) incluem coeficientes *fuzzy*.

Dado um problema de maximização (14) e (15), podemos enunciar o seguinte problema:

$$\text{minimize } F(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (16)$$

sujeitos às mesmas restrições (15).

Uma abordagem (Ekel; Pedrycz; Schinzinger, 1998; Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011) para lidar com restrições como (15) envolve a substituição de cada uma delas por um conjunto finito de restrições não *fuzzy*. Dependendo do sentido do problema, é possível converter as restrições (15) em análogos não *fuzzy* equivalentes

$$g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, d' \geq m \quad (17)$$

ou

$$g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, d'' \geq m \quad (18)$$

Problemas com coeficientes *fuzzy* em funções objetivo podem ser resolvidos modificando os métodos tradicionais (Ekel, 2002; Ekel; Pedrycz; Schinzinger, 1998). Por exemplo, o problema (14) e (17), bem como o problema (16) e (18) com variáveis discretas podem ser resolvidos com base na modificação dos algoritmos generalizados de otimização discreta (Ekel; Schuffner Neto, 2006). A sua execução está associada à necessidade de comparar ou ordenar alternativas (apresentadas como números *fuzzy* (Pedrycz; Gomide, 1998; Zimmermann, 2001) para escolher a melhor (maior ou menor) ou a pior (menor ou maior) delas. A classificação dos grupos de técnicas de ordenação de quantidades *fuzzy* pode ser encontrada em Chen e Hwang (1992). Entre eles, Horiuchi e Tamura (1998) consideram a construção de relações de preferência *fuzzy* por meio de comparações aos pares como a abordagem mais prática e justificada. Considerando isso, vale a pena distinguir um índice de comparação de números *fuzzy* introduzido em Orlovski (1981). Baseia-se na concepção de uma função de pertinência de uma relação de preferência generalizada.

Se $F(X_k)$ e $F(X_l)$ são conjuntos *fuzzy* que refletem avaliações da função objetivo F ou do atributo F para alternativas X_k e X_l , respectivamente, a quantidade $\eta\{\mu[F(X_k)], \mu[F(X_l)]\}$ é o grau de preferência $\mu[F(X_k)] \succcurlyeq \mu[F(X_l)]$, enquanto $\eta\{\mu[F(X_l)], \mu[F(X_k)]\}$ é o grau de preferência $\mu[F(X_l)] \succcurlyeq \mu[F(X_k)]$. Então, as funções de pertinência das relações de preferência generalizadas $\eta\{\mu[F(X_k)], \mu[F(X_l)]\}$ e $\eta\{\mu[F(X_l)], \mu[F(X_k)]\}$ assumem as seguintes formas:

$$\eta\{\mu[F(X_k)], \mu[F(X_l)]\} = \sup_{F(X_k), F(X_l) \in F} \min\{\mu[F(X_k)], \mu[F(X_l)], \mu_R[F(X_k), F(X_l)]\} \quad (19)$$

$$\eta\{\mu[F(X_l)], \mu[F(X_k)]\} = \sup_{F(X_k), F(X_l) \in F} \min\{\mu[F(X_l)], \mu[F(X_k)], \mu_R[F(X_l), F(X_k)]\} \quad (20)$$

onde $\mu_R[F(X_k), F(X_l)]$ e $\mu_R[F(X_l), F(X_k)]$ são as funções de pertinência das relações de preferência difusas correspondentes que, respectivamente, refletem a essência das preferências de X_k sobre X_l e X_l sobre X_k (por exemplo, “mais atraente”, “mais flexível” etc.).

Quando F pode ser medido em uma escala numérica, se a essência da preferência por trás da relação R for coerente com a ordem natural ($\leq$) ao longo do eixo dos valores

medidos de F , então (19) e (20), respectivamente, são reduzidos às seguintes expressões:

$$\eta\{\mu[F(X_k)], \mu[F(X_l)]\} = \sup_{\substack{F(X_k), F(X_l) \in F \\ F(X_k) \leq F(X_l)}} \min\{\mu[F(X_k)], \mu[F(X_l)]\} \quad (21)$$

$$\eta\{\mu[F(X_k)], \mu[F(X_l)]\} = \sup_{\substack{F(X_k), F(X_l) \in F \\ F(X_l) \leq F(X_k)}} \min\{\mu[F(X_k)], \mu[F(X_l)]\} \quad (22)$$

Se F tem caráter de maximização, as correlações (21) e (22) devem ser escritas para $F(X_k) \geq F(X_l)$ e $F(X_l) \geq F(X_k)$, respectivamente.

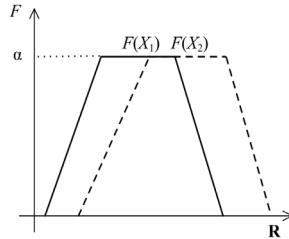
As correlações (21) e (22) concordam com alguns índices de classificação de números difusos bem conhecidos (Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011). Exemplos de sua utilização são dados em Pedrycz; Ekel; Parreiras (2011). O uso de (21) e (22) é bem fundamentado. Porém, na prática, há casos em que as grandezas *fuzzy* $F(X_k)$ e $F(X_l)$ possuem funções de pertinência trapezoidais (Pedrycz; Gomide, 1998; Zimmermann, 2001) que estão localizadas de tal maneira que não é possível distinguir X_k e X_l (Ekel, 2002). Por exemplo, podemos dizer que as alternativas X_1 e X_2 mostradas na Figura 1 são indistinguíveis, uma vez que:

$$\eta\{\mu[F(X_1)], \mu[F(X_2)]\} = \eta\{\mu[F(X_2)], \mu[F(X_1)]\} = \alpha. \quad (23)$$

Nessas situações, os algoritmos utilizados para resolver os problemas com coeficientes *fuzzy* não permitem obter soluções únicas porque “param” quando surgem condições como (23) (ver exemplos em Ekel, Pedrycz e Schinzinger (1998), Galperin e Ekel (2005) e Pedrycz, Ekel e Parreiras (2011). Isso deve ser considerado como uma consequência natural da existência de regiões de incerteza de decisão, produzidas por uma combinação da incerteza e da estabilidade relativa das soluções ótimas. Nessas circunstâncias, outros índices podem ser utilizados para a classificação de números *fuzzy*.

As revisões das técnicas desenvolvidas para classificação de números *fuzzy* podem ser encontradas em Wang e Kerre (2001a, 2001b). Essa revisão abrange a análise dos índices de classificação *fuzzy* propostos antes de 1998 (entre trabalhos mais recentes nessa área, é possível distinguir, por exemplo, Destercke e Couso (2015) e Saadi-Nezhad e Shahnazari-Shahrezaei (2013).

Figura 1. Comparação de alternativas com funções de pertinência trapezoidais



Wang e Kerre (2001a, 2001b) contam mais de 35 índices de classificação de números *fuzzy* e indicam que, diferentemente do caso dos números reais, as quantidades *fuzzy* não têm ordem natural. O princípio básico por trás dos métodos de ordenação de quantidades *fuzzy* consiste em converter cada quantidade *fuzzy* em um número real e

realizar a comparação de quantidades *fuzzy* com base nesses números reais. No entanto, cada abordagem para tal conversão concentra-se em um aspecto intrincado inerente às quantidades difusas. Como consequência, cada abordagem sofre de algumas fraquezas associadas à perda de informação inerente à conversão de uma quantidade *fuzzy* para um número real único. Cheng (1998) e Lee-Kwang (1999) compartilham dessa opinião. Cheng (1998) também indica que muitos dos índices produzem classificações diferentes para o mesmo problema. Chen e Lu (2002), Cheng (1998), Ekel, Pedrycz e Schinzinger (1998) e Lee-Kwang (1999) sublinham que os índices de classificação ocasionalmente resultam em escolhas que parecem não ser coerentes com a intuição. Tseng e Klein (1989) indicam que os métodos de classificação podem não refletir as preferências ou interesses dos tomadores de decisões. Além disso, Chen e Klein (1997) indicam que muitas técnicas de ordenação permitem apenas observar uma ordem entre quantidades difusas sem medir o grau de dominância entre elas. Finalmente, a maioria dos índices foi proposta com a aspiração à distinção obrigatória das alternativas, o que é muitas vezes questionável porque a incerteza da informação cria regiões de incerteza de decisão. Considerando isso, a possibilidade de identificar situações em que as alternativas comparadas não podem ser distinguidas deve ser considerada como um mérito do índice de classificação numérica *fuzzy* baseado na concepção da função de pertinência da relação de preferência generalizada.

Levando tudo isso em consideração, existe na verdade outra abordagem que é mais bem validada, natural e aceitável para a prática de tomada de decisão. Está associada à transição para análise multicritério de alternativas em um ambiente *fuzzy* porque a aplicação de critérios adicionais (incluindo critérios de caráter qualitativo) pode servir como um meio convincente para contrair as regiões de incerteza de decisão (Ekel, 2002; Ekel; Pedrycz; Schinzinger, 1998).

Assim, mesmo que o problema considerado seja de natureza monocritério, a incerteza da informação pode exigir a sua transformação num problema de caráter multicritério (multiatributo).

3.2. Modelagem de preferência difusa

Suponha que nos seja dado um conjunto de X alternativas provenientes da região de incerteza de decisão e/ou alternativas pré-determinadas, que devem ser examinadas por q critérios de natureza quantitativa e/ou qualitativa. O problema de tomada de decisão pode ser apresentado como um par $\langle X, R \rangle$ onde $R = \{R_1, R_2, \dots, R_p, \dots, R_q\}$ é um vetor de relações de preferência difusas (Fodor; Roubens, 1994; Orlovski, 1981; Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011) que pode ser apresentado como:

$$R_p = [X \times X, \mu_{R_p}(X_k, X_l)], \quad p = 1, 2, \dots, q, X_k, X_l \in X \quad (24)$$

onde $\mu_{R_p}(X_k, X_l)$ é uma função de pertinência da p -ésima relação de preferência difusa.

Em (24), R_p (também chamada de relação de preferência difusa não estrita ou relação de preferência fraca difusa na literatura) é definida como um conjunto difuso de todos os pares do produto cartesiano $X \times X$, de modo que a função de pertinência $\mu_{R_p}(X_k, X_l)$ representa o grau em que X_k domina fracamente X_l , ou seja, o grau em que

não X_k é pior do que X_l para o critério p . Num sentido um tanto vago, $\mu_{R_p}(X_k, X_l)$ também representa o grau de verdade da afirmação “ X_k é preferido a X_l ”.

Uma abordagem natural e convincente para obtenção de matrizes R_p é apresentada em Ekel, Pedrycz e Schinzinger (1998) e Pedrycz, Ekel e Parreiras (2011). Em particular, a disponibilidade de estimativas difusas ou linguísticas de alternativas $F_p(X_k)$, $p = 1, 2, \dots, q$, $X_k \in X$, com as funções de pertinência $\mu[F_p(X_k)]$, $p = 1, 2, \dots, q$, $X_k \in X$ permite, usando (21) e (22), construir R_p , $p = 1, 2, \dots, q$ aplicando as seguintes relações:

$$\mu_{R_p}(X_k, X_l) = \sup_{\substack{X_k, X_l \in X \\ F_p(X_k) \leq F_p(X_l)}} \min\{\mu[F_p(X_k)], \mu[F_p(X_l)]\} \quad (25)$$

$$\mu_{R_p}(X_k, X_l) = \sup_{\substack{X_k, X_l \in X \\ F_p(X_l) \leq F_p(X_k)}} \min\{\mu[F_p(X_k)], \mu[F_p(X_l)]\} \quad (26)$$

Se F_p tiver caráter de maximização, as relações (25) e (26) devem ser escritas para $F_p(X_k) \geq F_p(X_l)$ e $F_p(X_l) \geq F_p(X_k)$, respectivamente.

Outra abordagem para construir matrizes R_p com base em funções de preferência (Brans; Vincke, 1985) é dada em Parreiras e Ekel (2013). Os nossos resultados mais recentes sobre a construção de relações de preferência difusas são apresentados em Kokshenev *et al.* (2015). Se as estimativas $F_p(X_k)$, $p = 1, 2, \dots, q$, $X_k \in X$ forem definidas numa escala de valor unitário, estes resultados permitem obter $\mu_{R_p}(X_k, X_l)$, $p = 1, 2, \dots, q$, $X_k, X_l \in X$, como segue:

$$\mu_{R_p}(X_k, X_l) = 1 - \delta_p(X_l, X_k) \quad (27)$$

onde $\delta_p(X_l, X_k)$ corresponde ao volume de todas as diferenças positivas entre os piores resultados de $F_p(X_l)$ e os melhores resultados de $F_p(X_k)$.

Os resultados de Kokshenev *et al.* (2015) são adequados para lidar com estimativas difusas e nítidas no mesmo domínio, preservando as medidas de preferência na escala de intervalo.

As relações de preferência difusas não são uma forma única de representação de preferências. Por exemplo, Zhang, Chena e Chong (2004) e Zhang, Wang e Yang (2007) indicam oito formatos que podem ser utilizados para estabelecer preferências entre as alternativas analisadas. É natural que a sua utilização exija a conversão de todos os formatos para um formato único que possa ser processado e analisado. Considerando as vantagens e a racionalidade da aplicação de relações de preferência difusas para esse objetivo, os resultados de Chiclana, Herrera e Herrera-Viedma (1998), Herrera-Viedma, Herrera e Chiclana (2002) e Pedrycz, Ekel e Parreiras (2011) permitem utilizar as chamadas funções de transformação para converter diferentes formatos de preferência em relações de preferência difusas.

Vamos considerar a situação de estabelecimento de uma única relação de preferência *fuzzy* não estrita R . Ela pode ser processada (Orlovski, 1978, 1981) para construir uma relação de preferência estrita *fuzzy* da seguinte forma:

$$R^S = R \setminus R^{-1} \quad (28)$$

onde R^{-1} é a relação inversa.

A função de pertinência que corresponde a (28) é a seguinte:

$$\mu_R^S(X_k, X_l) = \max \{\mu_R(X_k, X_l) - \mu_R(X_l, X_k), 0\} \quad (29)$$

Serve de base para o procedimento de escolha introduzido por Orlovski (1978, 1981). Suas propriedades, bem como questões de sua caracterização axiomática, são discutidas, por exemplo, em (Bouyssou, 1997; Sengupta, 1998).

A utilização de (29) permite construir o conjunto de alternativas não dominadas com a função de pertinência:

$$\mu_R^{ND}(X_k) = \inf_{X_l \in X} [1 - \mu_R^S(X_l, X_k)] = 1 - \sup_{X_l \in X} \mu_R^S(X_l, X_k) \quad (30)$$

o que permite avaliar o nível de não dominância de cada alternativa X_k . Considerando que é natural escolher alternativas que proporcionem o maior nível de não dominância, podem-se escolher alternativas X^{ND} de acordo com a seguinte expressão:

$$X^{ND} = \{X_k^{ND} | X_k^{ND} \in X, \mu_R^{ND}(X_k^{ND}) = \sup_{X_k \in X} \mu_R^{ND}(X_k)\}. \quad (31)$$

As expressões (29)-(31) podem ser utilizadas para resolver problemas de escolha, bem como outros problemas, relacionados à avaliação, comparação, priorização e/ou ordenação de alternativas com um único critério. Essas expressões também podem ser aplicadas quando R for um vetor de relações de preferência difusas, sob diferentes abordagens para análise multiatributos. Dentre elas, destacamos: abordagem lexicográfica, abordagem compensatória com ajuste das taxas de *trade-off* entre critérios e abordagem flexível com ajuste do grau de otimismo. Nesse ponto, vale ressaltar que em todas as três abordagens descritas a seguir, $\mu_{R_p}^{ND}(X_k)$, $p = 1, 2, \dots, q$ desempenham um papel idêntico às funções de pertinência substituindo as funções objetivo $F_p(X)$, $p = 1, 2, \dots, q$ na análise de modelos $\langle X, F \rangle$ com base na abordagem Bellman-Zadeh para tomada de decisão em um ambiente difuso. Levando isso em consideração, os conjuntos *fuzzy* de alternativas não dominadas devem ser construídos de forma que definam uma ordenação linear no conjunto de alternativas de solução.

A abordagem lexicográfica é baseada na aplicação passo a passo de critérios de comparação de alternativas para construir uma sequência $X^1, X^2, \dots, X^q$ de modo que $X \supseteq X^1 \supseteq X^2 \supseteq \dots \supseteq X^q$. Isso é feito usando as seguintes expressões:

$$\mu_{R_p}^{ND}(X_k) = \inf_{X_l \in X^{p-1}} [1 - \mu_{R_p}^S(X_l, X_k)] = 1 - \sup_{X_l \in X^{p-1}} \mu_{R_p}^S(X_l, X_k), p = 1, 2, \dots, q; \quad (32)$$

$$X^p = \{X_k^{ND,p} | X_k^{ND,p} \in X^{p-1}, \mu_{R_p}^{ND}(X_k^{ND,p}) = \sup_{X_l \in X^{p-1}} \mu_{R_p}^{ND}(X_l)\}. \quad (33)$$

A abordagem compensatória com ajuste das taxas de *trade-off* entre critérios baseia-se na utilização da média aritmética ponderada dada pela seguinte expressão:

$$\mu^{ND}(X_k) = \sum_{p=1}^q \lambda_p \mu_{R_p}^{ND}(X_k) \quad (34)$$

onde pesos de importância, satisfazendo as condições $\lambda_p > 0, p = 1, 2, \dots, q$ e $\sum_{p=1}^q \lambda_p = 1$, são atribuídos a cada critério para refletir sua respectiva importância para a decisão.

Finalmente, a abordagem flexível com ajuste do grau de otimismo é realizada utilizando o operador de média ponderada ordenada (OWA), originalmente introduzido em Yager (1988), como segue:

$$\mu^{ND}(X_k) = OWA(\mu_{R_1}^{ND}(X_k), \mu_{R_2}^{ND}(X_k), \dots, \mu_{R_q}^{ND}(X_k)) = \sum_{i=1}^q w_i B_i(X_k) \quad (35)$$

onde $B_i(X_k)$ é o i -ésimo maior valor entre $\mu_{R_1}^{ND}(X_k), \mu_{R_2}^{ND}(X_k), \dots, \mu_{R_q}^{ND}(X_k)$.

O conjunto de pesos em (35) satisfaz as seguintes condições: $w_i > 0, i = 1, 2, \dots, q$ e $\sum_{i=1}^q w_i = 1$. Esses pesos podem ser determinados indiretamente pelo tomador de decisão da seguinte forma (Liu; Han, 2008):

$$w_i = Q\left(\frac{i}{q}\right) - Q\left(\frac{i-1}{q}\right), \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (36)$$

onde

$$\text{para } 0 \leq a \leq 0.5: Q(r, a) = \begin{cases} \frac{r-(1-2a)}{2a}, & \text{se } 1-2a \leq r \leq 1, \\ 0, & \text{de outra forma;} \end{cases} \quad (37)$$

ou:

$$\text{para } 0.5 \leq a \leq 1: Q(r, a) = \begin{cases} \frac{r}{2(1-a)}, & \text{se } 0 \leq r \leq 2(1-a), \\ 1, & \text{de outra forma} \end{cases} \quad (38)$$

A utilização dessas expressões exige que o tomador de decisão especifique um parâmetro $a \in [0, 1]$ que corresponde ao nível de compensação intercritério. Pode também ser entendido como um índice, que permite regular o grau de otimismo ou apetite ao risco inerente à atitude de decisão (Damodaran, 2008).

Os resultados descritos acima também serviram para desenvolver e melhorar métodos para tomada de decisão multicritério em grupo (Parreiras; Ekel; Bernandes Jr., 2012; Parreiras *et al.*, 2010; Parreiras; Ekel; Morais, 2012), por exemplo.

4. Esquema geral de tomada de decisão multicritério em condições de incerteza

Stewart (2005) indica que os modelos de tomada de decisão multicritério baseiam-se em avaliações essencialmente determinísticas das consequências de cada ação em termos de cada critério, podendo sujeitar os resultados e recomendações a certo grau de análise de sensibilidade. Em muitas situações, essa abordagem pode ser justificada quando a principal fonte de complexidade na tomada de decisões está associada à natureza multicritério do problema e não à natureza incerta das consequências individuais. No entanto, surgem situações, por exemplo, em problemas de planejamento estratégico,

quando os riscos e as incertezas são tão críticos como a questão dos objetivos de gestão contraditórios. Nessas situações, torna-se necessária uma modelagem mais formal das incertezas (Stewart, 2005). Levando isso em consideração, deve-se notar que os resultados de Ekel, Martini e Palhares (2008) podem servir para tal modelagem.

Os resultados de Ekel, Martini e Palhares (2008) estão associados à generalização da abordagem clássica (Luce; Raiffa, 1957; Raiffa, 1968) para lidar com a incerteza da informação na tomada de decisão monocritério para problemas multicritério. Esses resultados são baseados na combinação de dois ramos da matemática da incerteza: elementos da teoria dos jogos e da teoria dos conjuntos difusos. Eles não se enquadram nas abordagens amplas para lidar com incertezas externas na tomada de decisão multicritério, classificadas em Durbach e Stewart (2012), e juntamente com a análise de modelos $\langle X, F \rangle$ e modelos $\langle X, R \rangle$ (relacionados à tomada de decisão individual ou em grupo com base nos resultados discutidos acima, bem como na aplicação de diversas abordagens classificadas e discutidas em Herrera-Viedma *et al.* (2014), Martinez, Ruan e Herrera (2010) e Rodriguez e Martinez (2013), por exemplo). Esses resultados permitem realizar a análise multicritério sob condições de incerteza de acordo com o esquema geral direcionado ao uso da informação quantitativa disponível em um grau máximo para reduzir as regiões de incerteza de decisão. Se a capacidade de resolução do processamento formal da informação não permite obter soluções únicas, o esquema pressupõe a aplicação de informação de caráter qualitativo baseada no conhecimento, experiência e intuição dos especialistas envolvidos.

A abordagem clássica (Luce; Raiffa, 1957; Raiffa, 1968) está associada à análise realizada para determinadas alternativas de solução $X_k, k = 1, \dots, K$ e combinações representativas de dados iniciais (cenários ou estados de natureza) $Y_s, s = 1, \dots, S$ que definem a matriz de *payoff* correspondente com elementos $F(X_k, Y_s), k = 1, \dots, K, s = 1, \dots, S$. A escolha de alternativas de soluções racionais baseia-se na utilização dos chamados critérios de escolha. Em particular, a aplicação dos critérios de Wald, Laplace, Savage e Hurwicz, que são de caráter geral, é discutida em Luce e Raiffa (1957) e Raiffa (1968). Seu uso está associado às seguintes estimativas: o nível mínimo da função objetivo $F^{\min_k \min_{1 \leq s \leq S} k_s}$ o nível máximo da função objetivo $F^{\max_k} = \max_{1 \leq s \leq S} F(X_k, Y_s)$; o nível médio da função objetivo $\bar{F}(X_k) = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S F(X_k, Y_s)$; o nível máximo de risco (arrependimento) $R^{\max_k \max_{1 \leq s \leq S} k_s}$ onde $R(X_k, Y_s)$ é um gasto excessivo que ocorre sob a combinação do estado de natureza Y_s . e a escolha da alternativa de solução X_k em vez da alternativa de solução que é localmente ótima para os Y_s . dados.

Os critérios de escolha são representados abaixo sob a suposição, para maior certeza, de que a função objetivo deve ser minimizada.

O critério de Wald permite escolher X^W , que fornece:

$$\min_{1 \leq k \leq K} F^{\max_k \min_{1 \leq s \leq S} k_s} \quad (39)$$

O critério de escolha de Laplace está orientado a escolher X^L gerando:

$$\min_{1 \leq k \leq K} \bar{F}(X_k) = \min_{1 \leq k \leq K} \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S F(X_k, Y_s). \quad (40)$$

O critério de escolha de Savage permite escolher X^S garantindo:

$$\min_{1 \leq k \leq K} R^{\max_k \min_{1 \leq k \leq K} \max_{1 \leq s \leq S} x_{ks}}. \quad (41)$$

Finalmente, o critério de escolha de Hurwicz utiliza uma combinação linear de $F^{\max_k}$ e $F^{\min_k}$ e permite escolher X^H desde que:

$$\min_{1 \leq k \leq K} [\alpha F^{\max_k} - \min_k = \min_{1 \leq k \leq K} [\alpha \max_{1 \leq s \leq S} F(X_k, Y_s) + (1 - \alpha) \min_{1 \leq s \leq S} F(X_k, Y_s)]] \quad (42)$$

Onde $\alpha \in [0, 1]$ é o índice “pessimismo-otimismo” cuja magnitude é definida pelo tomador de decisão.

Como foi indicado acima, a utilização da abordagem Bellman-Zadeh para tomada de decisão em ambiente *fuzzy* para resolução de problemas multiobjetivos fornece linhas construtivas na obtenção de soluções harmoniosas com base na análise de problemas maxmin associados (3). Considerando isso, é possível generalizar a abordagem clássica para lidar com a incerteza da informação com base na utilização da abordagem Bellman-Zadeh. É natural que se tivermos q funções objetivo, q matrizes de *payoff* (matrizes de *payoff* modificadas (Ekel; Martini; Palhares, 2008) sejam construídas e analisadas.

Aplicando (5) a funções objetivo maximizadas ou (6) a funções objetivo minimizadas, é possível construir matriz de *payoff* modificada para a p -ésima função objetivo com elementos $\mu_{A_p}(X_k, Y_s), k = 1, \dots, K, s = 1, \dots, S$. A disponibilidade de q matrizes de *payoff* modificadas permite, aplicando (2), construir a matriz de *payoff* agregada com $\mu_D(X_k, Y_s), k = 1, \dots, K, s = 1, \dots, S$.

A análise da matriz de *payoff* agregada e a escolha das alternativas de solução racional baseiam-se na modificação (Ekel; Martini; Palhares, 2008) dos critérios de escolha (39)-(42). Em particular, o critério de Wald modificado tem a seguinte forma:

$$\max_{1 \leq k \leq K} \mu_D(X_k) = \max_{1 \leq k \leq K} \min_{1 \leq s \leq S} \min_{1 \leq p \leq q} \mu_{A_p}(X_k, Y_s). \quad (43)$$

O critério modificado de Laplace pode ser escrito da seguinte forma:

$$\max_{1 \leq k \leq K} \mu_D(X_k) = \max_{1 \leq k \leq K} \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \min_{1 \leq p \leq q} \mu_{A_p}(X_k, Y_s). \quad (44)$$

O critério modificado de Savage tem a seguinte forma:

$$\min_{1 \leq k \leq K} R^{\max_k \min_{1 \leq k \leq K} \max_{1 \leq s \leq S} \max_{1 \leq p \leq q} \min_{k_s} \mu_{A_p} \min_{1 \leq p \leq q} \mu_{k_s}}. \quad (45)$$

Por fim, o critério de escolha de Hurwicz assume a seguinte forma:

$$\max_{1 \leq k \leq K} [\alpha \min_{1 \leq k \leq K} \mu_D(X_k) + (1 - \alpha) \max_{1 \leq k \leq K} \mu_D(X_k)] =$$

$$\max_{1 \leq k \leq K} [\alpha \min_{1 \leq k \leq K} \min_{1 \leq p \leq q} \mu_D(X_k, Y_s) + (1 - \alpha) \max_{1 \leq k \leq K} \min_{1 \leq p \leq q} \mu_D(X_k, Y_s)]. \quad (46)$$

Exemplos de aplicação dos critérios de escolha modificados são dados em Ekel, Martini e Palhares (2008) e Pedrycz e Gomide (1998). Contudo, é possível indicar algumas limitações dos resultados de (Ekel; Martini; Palhares, 2008). Como exemplo, pode-se analisar um problema bicritério com funções objetivo minimizadas. As matrizes de *payoff* correspondentes relacionadas à aplicação do critério de escolha de Laplace são apresentadas nas Tabelas 1 e 2.

É possível notar que a alternativa X_4 é melhor que a alternativa X_2 do ponto de vista das duas funções objetivo analisadas separadamente. Assim, pode-se concluir que X_4 é a solução preferível. Contudo, a análise da matriz de *payoff* agregada (Tabela 3), formada com base no processamento das matrizes apresentadas nas Tabelas 1 e 2, mostra que a melhor alternativa é X_2 .

Embora o exemplo apresentado esteja associado à utilização do critério de escolha de Laplace, a utilização de outros critérios de escolha pode levar a resultados semelhantes.

Tabela 1. Matriz de *payoff* com estimativas características para a primeira função objetivo

	Y_1	Y_2	Y_3	$\bar{F}(X_k)$
X_1	2.65	1.00	1.56	1.74
X_2	1.18	1.21	3.00	1,80
X_3	1.04	2.72	2.74	2.17
X_4	1.24	2.18	1.62	1.68

Tabela 2. Matriz de *payoff* com estimativas características para a segunda função objetivo

	Y_1	Y_2	Y_3	$\bar{F}(X_k)$
X_1	4.34	5.00	2.96	4.10
X_2	2.00	3.72	4.49	3.41
X_3	3.99	4.15	2.96	3.70
X_4	2.00	2.52	4.97	3.16

Tabela 3. Matriz de *payoff* agregada com estimativas características

	Y_1	Y_2	Y_3	$\bar{F}(X_k)$
X_1	0.18	0	0.68	0.29
X_2	0.91	0.43	0	0.45
X_3	0.34	0.14	0.13	0.20
X_4	0.88	0.41	0.01	0.43

Uma forma de superar tais contradições é baseada na análise dos problemas (39)-(42) para cada função objetivo considerada em um ambiente com os estados de natureza $Y, s = 1, \dots, S$ (Pereira Jr *et al.*, 2015). Assim, é possível, aplicando as estimativas utilizadas para a formação dos critérios de escolha, construir as seguintes funções objetivo:

$$F^W(X_k) = \max_{1 \leq s \leq S} F(X_k, Y_s) \quad (47)$$

$$F^L(X_k) = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S F(X_k, Y_s) \quad (48)$$

$$F^S(X_k) = \max_{1 \leq s \leq S} R(X_k, Y_s); \quad (49)$$

$$F^H(X_k) = \alpha \max_{1 \leq s \leq S} F(X_k, Y_s) + (1 - \alpha) \min_{1 \leq s \leq S} F(X_k, Y_s). \quad (50)$$

Essa consideração das estimativas utilizadas para os critérios de escolha permite construir q problemas, geralmente, incluindo quatro ou menos funções objetivo (se nem todos os critérios de escolha forem utilizados na análise) como segue:

$$F_{r,p}(X) \rightarrow \min_{X \in L}, \quad r = 1, \dots, t, p = 1, \dots, q \quad (51)$$

onde as funções objetivo são: $F_{1,p}(X) = F_p^W(X_k)$, $F_{2,p}(X) = F_p^L(X_k)$, $F_{3,p}(X) = F_p^S(X_k)$ e $F_{4,p}(X) = F_p^H(X_k)$.

Assim, a análise das alternativas de solução e consequente escolha de alternativas de solução racional pode ser realizada no âmbito dos modelos $\langle X, F \rangle$. Em particular, aplicando (6) para construir as funções de pertinência para $F_{r,p}(X)$, $r = 1, \dots, t$, $p = 1, \dots, q$, pode-se usar (2) para sua agregação e para resolução do problema (3) para X_k , $k = 1, \dots, K$. Proporciona a escolha das alternativas de solução racional de acordo com o princípio da otimalidade de Pareto (Ehrgott, 2005; Hwang; Masud, 1979) e permite superar as limitações da generalização da abordagem clássica para lidar com a incerteza da informação para a tomada de decisão multicritério indicada acima. Os exemplos dados em Pereira Jr *et al.* (2015) demonstram a racionalidade de usar essa abordagem para analisar as alternativas de solução.

Tendo em conta as considerações acima apresentadas, é possível apresentar o esquema geral da tomada de decisão multicritério sob incerteza de informação que inclui três fases.

A primeira etapa consiste em construir q matrizes de *payoff* (de acordo com o número de funções objetivo consideradas) para todas as combinações das alternativas de solução dadas X_k , $k = 1, \dots, K$ e dos estados representativos da natureza dados Y_s , $s = 1, \dots, S$.

Para construir matrizes de *payoff* é necessário resolver S problemas multicritério formalizados no âmbito dos modelos $\langle X, F \rangle$. Suas soluções permitem obter as alternativas de solução X_k , $k = 1, \dots, K$ ($K \leq S$). Doravante X_k , $k = 1, \dots, K$ devem ser substituídos em $F_p(X)$, $p = 1, \dots, q$ para Y_s , $s = 1, \dots, S$. Essas substituições geram q matrizes de *payoff*.

A segunda etapa está associada à análise das matrizes de *payoff* obtidas. Essa etapa está associada aos resultados relacionados à consideração dos critérios de escolha como funções objetivo. No entanto, a insuficiente capacidade de resolução do presente estágio nem sempre permite obter soluções únicas. Essa circunstância pode exigir a aplicação da terceira etapa.

A terceira etapa está associada à construção e análise de modelos $\langle X, R \rangle$ para a subsequente contração das regiões de incerteza de decisão. Conforme indicado acima, a utilização de modelos $\langle X, R \rangle$ permite levar em conta índices de caráter quantitativo e qualitativo, cuja definição é baseada no conhecimento, experiência e intuição dos especialistas envolvidos.

5. Modelos $\langle X, F \rangle$ e métodos de sua análise em problemas de engenharia de energia

Esta Seção reflete aplicações dos resultados apresentados nas Seções 2 e 4 para resolver diversos problemas relacionados ao planejamento, operação e controle em sistemas e subsistemas de potência.

5.1. Alocação multiobjetivo de recursos e suas aplicações

A presente Subseção é dedicada a utilizar os resultados relacionados à alocação multiobjetivo de recursos ou sua escassez para resolver problemas de alocação de potência e escassez de energia (conforme aplicado ao gerenciamento de carga) e operação do sistema de energia na declaração multiobjetivo.

5.1.1. Alocação de energia e escassez de energia aplicada ao gerenciamento de carga

As concepções existentes de gerenciamento de carga em sistemas de potência são unidas pelo seguinte (Berredo *et al.*, 2011): a elaboração das ações de controle é realizada em dois estágios. Ao nível dos centros de controle energético, a otimização da alocação de potência e das carências energéticas (naturais, associadas à inadequada potência instalada dos geradores e/ou deficiência de energia primária, ou à viabilidade econômica de gestão de cargas) é efetuada a diferentes níveis de hierarquias territoriais, temporais e situacionais de planejamento e operação. Permite elaborar tarefas para os consumidores. No nível do consumidor, as ações de controle são realizadas de acordo com essas tarefas.

Assim, os problemas de alocação de potência e escassez de energia são de fundamental importância em uma família de problemas de gerenciamento de carga. Devem ser analisadas não apenas como tarefas técnicas e econômicas, mas também como sendo de natureza ecológica e social. Além disso, ao resolvê-los, é necessário levar em conta considerações relacionadas à formação de incentivos aos consumidores. Considerando isso, deve-se ressaltar que métodos baseados em princípios fundamentais de alocação de recursos apresentam desvantagens (Berredo *et al.*, 2011). Eles poderiam ser superados enquadrando os problemas no âmbito de modelos multiobjetivos. Isso ajuda-nos a considerar e minimizar diversas implicações da alocação de energia e da escassez de energia e a criar influências de incentivo para os consumidores. A aplicação da abordagem multicritério ao gerenciamento de carga também é benéfica para fornecer

um novo olhar sobre os problemas de planejamento e operação dos mercados de eletricidade (Berredo *et al.*, 2011).

A análise substancial dos problemas de atribuição de energia e de escassez de energia, dos sistemas de gestão econômica, incluindo a política fiscal, bem como da informação reportada prontamente disponível permitiu a construção de um conjunto geral de objetivos para resolver esses problemas na declaração multicritério. A lista completa inclui 17 tipos de metas. Alguns deles são fornecidos abaixo:

- Limitação primária de consumidores com menor custo de produção produzida ou de serviços prestados em 1 kWh de energia consumida (conquista de queda mínima na produção total produzida e/ou em serviços prestados);
- Limitação primária de consumidores com menor nível de pagamento no orçamento do Estado para recursos de trabalho por 1 kWh de energia consumida;
- Limitação primária de consumidores com maior nível de coeficiente de posse energética de trabalho sobre 1 kWh de energia consumido (conquista da redução máxima do número de trabalhadores, cuja produtividade e, consequentemente, salário é diminuída);
- Limitação primária de consumidores com maior nível de poluição ambiental em consumir 1 kWh de energia;
- Limitação primária de consumidores com menor valor do coeficiente de procura (limitação primária de consumidores com maiores possibilidades de produção fora do horário de pico);
- Limitação primária de consumidores com menor duração de utilização de carga máxima em vinte e quatro horas (limitação primária de consumidores com maiores possibilidades de transferência de carga máxima no intervalo diário).

O conjunto geral de objetivos visa diminuir diversas consequências negativas para os consumidores e criar influências de incentivo para eles. Esse conjunto é universal porque pode servir de base para a construção de modelos em diferentes níveis de hierarquia de gestão de carga através da agregação de informações e posterior decomposição dos problemas de acordo com diferentes índices. A lista de objetivos correspondente pode ser definida para cada caso pelo tomador de decisão, que pode ser individual ou de grupo (por exemplo, podem ser organizações dirigentes de um país ou estado, um conselho de administração de empresas etc.).

Como exemplo, considere a solução para o problema de alocação de escassez de energia para quatro consumidores para $A=13.000$ kW ao utilizar o operador min e o operador produto, considerando as metas 1, 12, 13 e 16 listadas acima, descritas por

$$F_p(X) = \sum_{i=1}^4 c_{pi}x_i, \quad p=1,12,16 \quad (52)$$

que devem ser minimizados e

$$F_{13}(X) = \sum_{i=1}^4 c_{13i}x_i \quad (53)$$

que deve ser maximizado. Em (52) e (53), $x_i, i = 1, 2, 3, 4$ são limitações de fornecimento de energia aos consumidores. Os coeficientes $c_{pi}, p = 1, 12, 13, 16, i = 1, 2, 3, 4$ dados na Tabela 4 são determinados pelas características dos consumidores. A Tabela 4 também inclui os valores permitidos das limitações $A, i = 1, 2, 3, 4$.

Os resultados obtidos para o operador min (X^0) e o operador produto (X^{00}) são apresentados nas Tabelas 5 e 6, respectivamente. Esses resultados demonstram que a utilização do operador min proporciona uma solução harmoniosa. A alta qualidade das soluções baseadas na aplicação do operador min é confirmada por numerosos experimentos computacionais.

Tabela 4. Informações iniciais

I	1	2	3	4
$*c_{1,i}$	1.45	1.73	2.11	1.89
$c_{12,i}$	0.44	0.51	0.32	0.19
$c_{13,i}$	0.40	0.32	0.50	0.35
$**c_{16,i} **$	17.30	14.12	18.16	20.10
$***A_i$	8000	5000	4000	5000

Nota: *valores em BR\$/kWh; **valores em horas; ***valores em kW

Tabela 5. Alocação de escassez de energia

i	1	2	3	4
X^0 [kW]	5004	2962	2411	2623
X^{00} [kW]	8000	1064	3936	0

T

Tabela 6. Níveis de funções de pertinência

p	1	15	16	17
$\mu_{A_p}(X^0)$	0.52	0.52	0.52	0.52
$\mu_{A_p}(X^{00})$	0.67	0.36	0.52	0.96

5.1.2. Operação do sistema de energia multiobjetivo

A utilização dos resultados apresentados na Seção 2 permite aplicar a abordagem multicritério à operação do sistema de energia para realizar o despacho em diversos objetivos. Em Berredo *et al.* (2011), isso é demonstrado por um estudo de caso com o sistema padrão IEEE 30-buses considerando e minimizando as seguintes funções objetivo: perdas, emissões de óxido de enxofre e emissões de óxido de nitrogênio.

A consideração das funções objetivo das emissões não cria quaisquer dificuldades. Ao mesmo tempo, a apresentação da função objetivo das perdas levanta dificuldades. Uma possível forma de contornar esse problema é a aplicação de procedimentos de otimização multiobjetivo sequencial (Berredo *et al.*, 2011), utilizando modelos de sensibilidade para refletir a mudança de perda que ocorre em cada etapa de otimização. A construção eficiente desses modelos é baseada na aplicação de técnicas de projeto experimental (Ekel *et al.*, 2013).

5.2. Modelos multiobjetivos no planejamento e operação de sistemas de distribuição

As funções mais importantes dos sistemas de gerenciamento de distribuição são realizadas com base na resolução de problemas de otimização da configuração da rede (reconfiguração da rede) e otimização do controle de tensão nos sistemas de distribuição. Sua declaração e solução dentro da estrutura dos modelos $\langle X, F \rangle$ são brevemente discutidas abaixo. A presente Subseção também inclui a consideração de um problema de alocação de fontes de potência reativa em sistemas de distribuição aplicando modelos $\langle X, F \rangle$.

5.2.1. Otimização multiobjetivo da configuração de redes em sistemas de distribuição

Os problemas de otimização da configuração de redes em sistemas de distribuição estão associados à alteração das topologias de rede pela alteração do estado dos seus comutadores (ou seja, pela alteração dos locais das suas desconexões). Esses problemas são resolvidos no planejamento e operação de longo e curto prazo e podem ser aplicados em estudos de projeto. O aumento do interesse por eles está associado à introdução de tecnologias de redes inteligentes com ampla automação de redes de distribuição cujos interruptores são monitorados e controlados remotamente. Isso permite resolvê-los *on-line* e em tempo real. Muitos estudos têm se concentrado no desenvolvimento de soluções para esses problemas com base em abordagens diversas (por exemplo, é possível indicar trabalhos recentes (Aman *et al.*, 2014; Kumar; Jayabarathi, 2012; Zhu, 2009). Esses estudos “competem” na aspiração pela obtenção de soluções “mais ótimas”. Contudo, é aspiração, considerando a incerteza da informação, não é convincente. Ao mesmo tempo, os trabalhos indicados acima, bem como outros trabalhos nessa área, não permitem considerar uma reação do sistema de potência ao otimizar a configuração da rede de distribuição. A falta de consideração, por exemplo, da mudança nas perdas do sistema elétrico pode resultar em uma deterioração significativa na eficiência da reconfiguração da rede de distribuição (os resultados de (Ekel *et al.*, 2013) permitem superar essa desvantagem com base na construção dos chamados equivalentes funcionalmente orientados). Finalmente, a maioria dos estudos existentes está direcionada para a resolução dos problemas monocritério. Ao mesmo tempo, os problemas de reconfiguração da rede são inerentemente de natureza multicritério porque têm impacto

na fiabilidade, na qualidade do serviço e na viabilidade econômica do fornecimento de energia.

Considerando isso, o sistema computacional DNOS (Berredo *et al.*, 2011) (baseado nas aplicações dos resultados discutidos na Seção 2) permite considerar e minimizar funções objetivas de perdas de potência, perdas de energia, índice de frequência média de interrupção do sistema (SAIFI), duração média de interrupção do sistema (SAIDI), subfornecimento de energia, consumo de energia de baixa qualidade (consumo de energia fora dos limites de tensão permitidos) e sobrecarga integrada de elementos da rede em diversas combinações.

Consideremos um problema simples de otimização da configuração de uma rede de 13,8 kV, que inclui 77 barras e 87 ramais. Como funções objetivo, foram consideradas as perdas de potência ΔP , as perdas de energia ΔW , e o consumo de energia de baixa qualidade ΔN .

Os resultados da otimização monocritério em $\Delta P, \Delta W, \Delta N$, e da otimização multiobjetivo são apresentados na Tabela 7. Esses resultados, bem como os resultados da resolução de outros problemas de otimização de configuração de redes em sistemas de distribuição (Berredo *et al.*, 2011) mostram que a aplicação do multicritério abordagem leva a soluções harmoniosas com pequenos desvios das soluções localmente ótimas em cada critério.

Tabela 7. Níveis de funções objetivo

Função objetivo	Estado inicial	Otimização em ΔP	Otimização em ΔW	Otimização em ΔN	Otimização multiobjetivo
ΔP (kW)	99.15	64.10	64.56	84.88	66.98
ΔW (kWh)	1191.32	849.09	835.48	1146.49	854.66
ΔN (kWh)	502.42	1086.09	349.97	145.92	188.28

5.2.2. Otimização do controle de tensão em sistemas de distribuição

As técnicas de otimização do controle de tensão, inovadoras no âmbito do sistema computacional VCOS (Berredo *et al.*, 2011), visam minimizar o consumo de energia de baixa qualidade. Porém, de acordo com uma hierarquia situacional, pode ser necessária a implementação de um controle energeticamente eficiente, considerando as características estáticas das cargas. Assim, torna-se necessário falar sobre a segunda definição do problema dirigido à minimização do consumo de energia de má qualidade e à redução da carga de pico e/ou do consumo de energia. Essa declaração também é inovadora em função do VCOS (essa implementação é baseada nos resultados propostos na Seção 2). Exemplos de aplicação de VCOS são dados em (Berredo *et al.*, 2011). É natural que uma aplicação do sistema VCOS para controle de tensão em sistemas de potência industriais também possa ser muito útil.

5.2.3. Compensação de potência reativa em sistemas de distribuição

Tradicionalmente, os problemas de compensação de potência reativa estão associados à seleção das localizações, tamanhos e tipos de capacitores para minimizar a

função objetivo de natureza econômica, enquanto as restrições nos limites superior e inferior de tensão em diferentes níveis de carga são satisfeitas.

Considerando a natureza discreta de tais problemas, os algoritmos generalizados de otimização discreta (Ekel; Schuffner Neto, 2006) podem ser aplicados para sua solução. Contudo, a nossa experiência mostra que a necessidade de observar simultaneamente restrições nos limites superior e inferior de tensão em diferentes barras cria obstáculos essenciais. Não é incomum enfrentarmos situações em que essas restrições induzem regiões viáveis vazias. Esses obstáculos podem ser evitados minimizando a função objetivo de natureza econômica, bem como a função objetivo que reflete um volume de consumo de energia de baixa qualidade. Além disso, se o problema estiver associado à determinação dos tipos de capacitores (fixos ou chaveados), a quantidade de objetivos deverá ser aumentada. Considerando isso, os algoritmos de Ekel e Schuffner Neto (2006) foram modificados para resolver problemas multiobjetivos discretos com base nos resultados da Seção 2. Os algoritmos modificados serviram para o desenvolvimento da plataforma computacional EPODIAN para resolver problemas de compensação de potência reativa tanto em monocritério quanto em multicritério colocações para redes de distribuição em grande escala.

A título de exemplo, a Tabela 8 demonstra os resultados da aplicação do EPODIAN para a alocação de fontes de energia reativa em uma rede de distribuição 13,8/0,22 kV de uma das subestações da Companhia Energética de Minas Gerais (CEMIG). Essa rede inclui 2 alimentadores com mais de 5.000 consumidores conectados a eles. A extensão total dos alimentadores é de 729km. Eles são modelados por 9.660 nós elétricos. Na Tabela 8, *I* é um estado inicial, *A* é uma solução monocritério que minimiza a função objetivo de natureza econômica, *B* é uma solução monocritério que minimiza a função objetivo que reflete um volume de consumo de energia de baixa qualidade, e *C* é uma solução multicritério que fornece um compromisso entre as soluções *A* e *B*.

Tabela 8. Resultados da solução

	*Função objetivo econômico	**Consumo de energia de baixa qualidade	***Potência reativa nominal instalada
<i>I</i>	708	826	600
<i>A</i>	543	472	630
<i>B</i>	661	384	1215
<i>C</i>	568	396	900

Nota: * valores em milhões de reais; ** valores em MWh por ano; valores em kVar.

Embora os resultados apresentados não tenham em conta a incerteza da informação inicial, o EPODIAN permite a sua consideração com base nos resultados da Seção 4.

6. Modelos <X, R> e métodos de sua análise em problemas de engenharia de energia

Os resultados apresentados na Seção 3 relacionados à construção e análise de modelos $\langle X, R \rangle$ serviram para resolver diversos problemas de engenharia de energia. Em particular, eles têm sido usados para resolver problemas de escolha de fontes locais de energia reativa em sistemas de energia (Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011), seleção de tecnologia apropriada no planejamento de difusão renovável (Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011), tomada de decisão espacial aplicada à avaliação, comparação e priorização de alternativas de transmissão de energia elétrica, bem como problemas de planejamento de subestações em sistemas de potência e priorização no planejamento de manutenção de sistemas de distribuição discutidos abaixo. Todas essas aplicações mostram que a teoria dos conjuntos difusos pode servir para agregar de forma adequada e eficaz informações provenientes de diversas fontes, aplicando diferentes operadores de agregação. Relativamente à utilização de diferentes operadores de agregação, importa referir que Kokshenev *et al.* (2015) descrevem um *framework* para um centro de apoio à decisão baseado na *web* para auxiliar diversas situações de tomada de decisão inter-relacionadas desde o planejamento e gestão em empresas de energia elétrica. Esse quadro apoia pequenos grupos colaborativos que trabalham de forma assíncrona num ambiente onde o único tomador de decisão, que centraliza a responsabilidade por uma decisão final, pode ser auxiliado por um grupo de especialistas, que contribuem com as suas opiniões para essa decisão. A disponibilidade de diferentes operadores de agregação permite que a tomada de decisão produza diferentes atitudes (Palomares *et al.*, 2012): pessimista, otimista, compensatória com ajuste das taxas de compensação entre critérios, bem como lexicográfica com priorização de critérios. Contudo, quando o tomador de decisão não consegue escolher uma atitude única para analisar o problema, o centro de apoio à decisão recomenda uma solução generalizada, que considere todas as atitudes simultaneamente.

6.1. Planejamento de subestações em sistemas de energia

Como foi indicado acima, muitos casos de problemas de tomada de decisão relacionados a sistemas de energia podem ser resolvidos por meio da construção e análise de modelos $\langle X, F \rangle$ e $\langle X, R \rangle$. Isso pode ser ilustrado considerando um dos problemas mais importantes da expansão do sistema de energia relacionado à seleção do local da subestação. Em particular, na primeira fase, os modelos $\langle X, F \rangle$ podem ser utilizados para identificar regiões adequadas para a instalação de subestações com base na consideração de objetivos de minimização dos custos associados à instalação, operação e manutenção, maximizando a fiabilidade do sistema, otimização dos índices de qualidade da energia elétrica etc.

Porém, geralmente, as recomendações fornecidas pela análise dos modelos $\langle X, F \rangle$ nem sempre são suficientemente convincentes para determinar o terreno onde a subestação será efetivamente construída. Normalmente, resta prospectar as regiões recomendadas para áreas desocupadas e obter mais informações sobre atributos como aqueles relacionados aos objetivos considerados na primeira etapa, e outros atributos relativos a questões legais, aceitação social, impacto urbano (interferências com outros serviços públicos) etc. Considerando isso, na segunda etapa, métodos de análise

multiatributo baseados em modelagem de preferências *fuzzy* podem ser aplicados para a tomada de decisão final do local mais adequado para a instalação da subestação. Vale ressaltar que a análise realizada na primeira etapa tem um enfoque mais amplo do que a da segunda etapa. Muitas vezes, para reunir as informações necessárias à realização da análise da segunda etapa, é necessária a prospecção *in loco* das regiões que foram recomendadas pelos resultados da primeira etapa.

Como exemplo de aplicação apresentamos uma situação de decisão real, que foi realizada na CEMIG. Nesse caso de estudo, um diagnóstico do sistema revelou a necessidade de construção de uma nova subestação em uma região específica para acomodar a demanda de energia para os próximos 20 anos. Nesse contexto, surgiu um problema de tomada de decisão multicritério: escolher um local para instalar a nova subestação, entre cinco opções denotadas como $X_1, X_2, \dots, X_5$. Os critérios considerados no processo de decisão são os seguintes:

- C_1 : impacto ambiental;
- C_2 : impacto urbano;
- C_3 : custos operacionais;
- C_4 : custos de instalação;
- C_5 : acessibilidade para serviços de manutenção.

A Tabela 9 apresenta as avaliações das alternativas de solução para esses critérios.

Tabela 9. Avaliações de alternativas de solução

Alternativas \ Critérios	C_1	C_2	C_3	$*C_4$	C_5
X_1	Impacto muito baixo	Impacto muito baixo	Custos muito pequenos	67000	Muito fácil
X_2	Baixo impacto	Baixo impacto	Pequenos custos	62000	Fácil
X_3	Baixo impacto	Impacto médio	Custos muito pequenos	59500	Difícil
X_4	Impacto médio	Baixo impacto	Pequenos custos	79500	Regular
X_5	Impacto médio	Baixo impacto	Custos médios	77500	Regular

Nota: *valores em milhões de reais.

As escalas qualitativas baseadas em conjuntos difusos utilizadas para os critérios C_1 , C_2 , C_3 , e C_5 são mostradas nas Figuras 2-5.

Figura 2. Escala qualitativa baseada em conjuntos difusos utilizada para o critério C_1

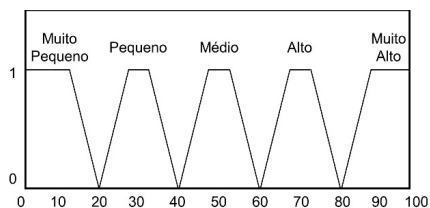


Figura 3. Escalas qualitativas baseadas em conjuntos difusos utilizadas para o critério C_2

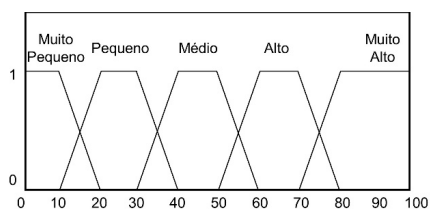


Figura 4. Escalas qualitativas baseadas em conjuntos difusos utilizadas para o critério C_3

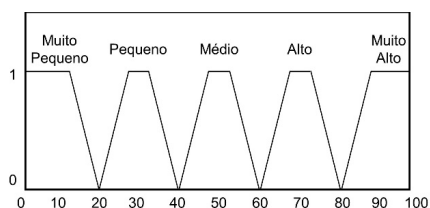
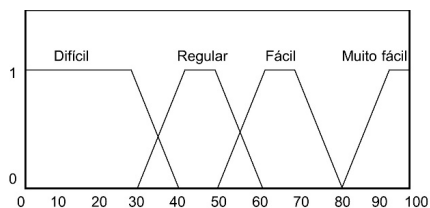


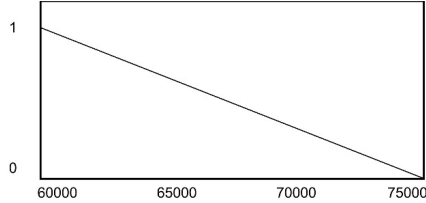
Figura 5. Escalas qualitativas baseadas em conjuntos difusos utilizadas para o C_4



A função de utilidade mostrada na Figura 6 foi construída pelo tomador de decisão para expressar suas preferências por um critério C_4 . As relações de preferência *fuzzy* não estritas $R_1, R_2, \dots, R_5$ foram obtidas com o uso da abordagem baseada na aplicação (25) e

(26), nos resultados de Parreiras e Ekel (2011), bem como em funções de transformação apropriadas.

Figura 6. Escalas qualitativas baseadas em conjuntos difusos utilizadas para critério C_5



Aplicando (29) e (30) a cada relação de preferência difusa não estrita, foram obtidos os seguintes conjuntos *fuzzy* de soluções não dominadas:

- $\mu_{R_1}^{ND}(X_k) = [1.00 \quad 0.73 \quad 0.73 \quad 0.00 \quad 0.00];$
- $\mu_{R_2}^{ND}(X_k) = [1.00 \quad 0.81 \quad 0.00 \quad 0.81 \quad 0.81];$
- $\mu_{R_3}^{ND}(X_k) = [1 \quad 0.73 \quad 1 \quad 0.73 \quad 0.00];$
- $\mu_{R_4}^{ND}(X_k) = [0.63 \quad 0.87 \quad 1.00 \quad 0.00 \quad 0.10];$
- $\mu_{R_5}^{ND}(X_k) = [1.00 \quad 0.77 \quad 0.00 \quad 0.00 \quad 0.00].$

A Tabela 10 apresenta os resultados obtidos aplicando as três diferentes abordagens de análise multicritério descritas acima e com algumas configurações diferentes de seus parâmetros de entrada. Na prática, o tomador de decisão pode selecionar uma atitude específica considerada mais adequada para a situação de decisão ou então uma recomendação generalizada para o problema, que se baseia na necessidade de satisfazer simultaneamente as diferentes atitudes face à situação de decisão (Palomares *et al.*, 2012). Assim, por exemplo, se o tomador de decisão deseja evitar fraquezas expressivas numa solução, a atitude pessimista pode ser usada para justificar a escolha de X_2 . Contudo, se o tomador de decisão não puder selecionar um método ou uma atitude entre: priorizar um critério; ser pessimista ou otimista; para permitir compensação etc., então a solução que em geral tem melhor desempenho que as outras pode ser selecionada. Nesse exemplo, se forem considerados apenas os resultados apresentados na Tabela 9, tal alternativa corresponde a X_1 , sendo seguida de X_2 .

Tabela 10. Resultados para diferentes atitudes de decisão

Abordagem	$\mu_R^{ND}(X_k)$					Ranking
Lexicográfica: $C_2 > C_5 > C_1 > C_3 > C_4$	-					$X_1 > X_2 > X_4 > X_5 > X_3$
Ordered weighted averaging: $a=1$ (otimista)	[1.00	0.87	1.00	0.81	0.]	$(X_1 \approx X_3) > X_2 > (X_4 \approx X_5)$
Ordered weighted averaging: $a=0$ (pessimista)	[0.63	0.73	0.00	0.00	0.]	$X_2 > X_1 > (X_3 \approx X_4 \approx X_5)$
Ordered weighted averaging: $a=0.3$	[0.87	0.74	0.24	0.00	0.]	$X_1 > X_2 > X_3 > (X_4 \approx X_5)$
Média ponderada: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_5=0.25$; $\lambda_3=\lambda_4=0.125$	[0.95	0.78	0.43	0.29	0.]	$X_1 > X_2 > X_3 > X_4 > X_5$

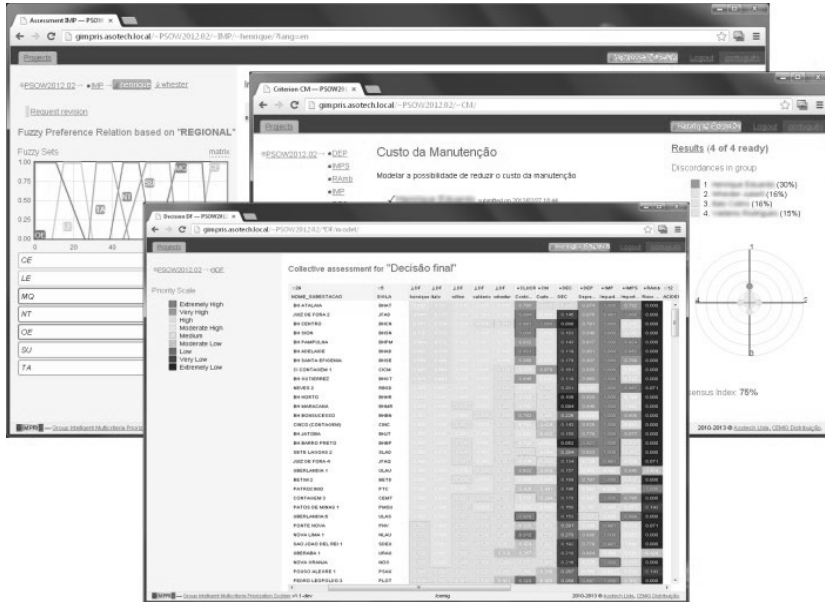
6.2. Priorização no planejamento de manutenção do sistema de distribuição

O problema da priorização no planejamento da manutenção visa garantir a confiabilidade e a qualidade do serviço de fornecimento de energia por meio da manutenção preventiva de redes e equipamentos. A CEMIG implementa uma estratégia para realizar a manutenção em sistemas de distribuição de acordo com os planos sugeridos pelos fabricantes de elementos e equipamentos de rede.

As técnicas de priorização permitem levar em consideração não apenas parâmetros dos elementos e equipamentos da rede, mas também fatores relacionados às condições de seu funcionamento. Além dos riscos de falhas, que podem ser avaliados através da análise estatística, são considerados no processo de priorização fatores associados ao impacto dessas falhas. Entre eles é possível citar fatores quantitativos (número de consumidores, demandas energéticas etc.) bem como fatores qualitativos (impacto político, complexidade de manutenção, impacto ambiental etc.).

O sistema computacional para priorização no planejamento de manutenção GIMPRIS implementado para a CEMIG fornece ambiente de tomada de decisão em grupo na plataforma *web* (FIG. 7). As ferramentas flexíveis para modelagem de preferência e agregação são projetadas para ampliar os recursos dos modelos $\langle X, R \rangle$ para priorização de mais de 50.000 itens de equipamento. O esquema dinâmico de gerenciamento em grupo (Parreiras; Ekel; Bernandes Jr., 2012) implementado no sistema permite que um supervisor controle eficientemente o processo de convergência ao consenso, enquanto modera até 10 especialistas simultaneamente.

Figura 7. Ambiente de tomada de decisão em grupo baseado na *web* para priorização no planejamento de manutenção do sistema de distribuição



7. Conclusões

Os problemas de projeto, planejamento, operação e controle de sistemas complexos, que requerem a aplicação de uma abordagem multicritério para sua solução, podem ser formulados de forma adequada e eficaz no âmbito de duas classes gerais de modelos multiobjetivo (modelos $\langle X, F \rangle$) e tomada de decisão multiatributo (modelos $\langle X, R \rangle$). A consideração conjunta dos modelos $\langle X, F \rangle$ e dos modelos $\langle X, R \rangle$ justifica-se do ponto de vista substancial: em qualquer tipo de nossas atividades surgem sempre duas questões fundamentais: “o que fazer?” e “como fazer?”. As respostas à primeira questão fundamental podem ser elaboradas através da construção e análise de modelos $\langle X, R \rangle$. A construção e análise de modelos $\langle X, F \rangle$ auxiliam na resposta à segunda questão fundamental. Além disso, a análise dos modelos $\langle X, F \rangle$ e dos modelos $\langle X, R \rangle$ serve como parte de um esquema geral para tomada de decisão multicritério sob condições de incerteza.

A aplicação do operador de agregação min na análise de modelos $\langle X, F \rangle$ gera soluções harmoniosas. A organização do processo computacional de resolução de problemas maxmin, relacionado à análise de modelos $\langle X, F \rangle$ (com variáveis contínuas e discretas), que parte de soluções localmente ótimas, fornece soluções harmoniosas pertencentes ao conjunto de Pareto. Isso permite recusar a execução de procedimentos complicados de construção do conjunto de Pareto e abre a possibilidade real de utilização

da abordagem multicritério em problemas de planejamento, operação e controle de curto prazo.

Várias técnicas para construir relações de preferência *fuzzy* foram discutidas. Foram consideradas três abordagens diferentes para analisar modelos $\langle X, R \rangle$. As abordagens permitem a utilização de diferentes operadores de agregação que permitem ao tomador de decisão produzir diversas atitudes (pessimistas, otimistas, compensatórias etc.). Contudo, na opinião dos autores, muitas questões relacionadas à produção de atitudes diversas permanecem em aberto. Considerando isso, uma das futuras direções de pesquisa em modelagem de preferências *fuzzy* está associada à resposta a essas questões.

A análise conjunta dos modelos $\langle X, R \rangle$ e dos modelos $\langle X, R \rangle$ com a generalização da abordagem clássica de consideração da incerteza da informação (baseada na análise de agregações especiais de matrizes de *payoff*) para problemas multicritério serviu para o desenvolvimento de um esquema geral para a tomada de decisão multicritério em condições de incerteza. A característica importante do esquema é a utilização da informação quantitativa disponível ao máximo para reduzir as regiões de incerteza de decisão. Se a capacidade de resolução de problemas relacionados com o processamento de informação quantitativa não permite obter soluções únicas, o esquema geral pressupõe a utilização de informação qualitativa baseada no conhecimento, experiência e intuição dos especialistas envolvidos no processo de tomada de decisão. No presente trabalho foram utilizados os critérios de escolha de Wald, Laplace, Savage e Hurwicz. Considerando isso, uma das futuras direções de pesquisa sobre tomada de decisão multicritério em condições de incerteza está associada à aplicação de outros critérios de escolha, bem como de outros operadores para agregações de matrizes de *payoff*, para fornecer mais flexibilidade na seleção de procedimentos de solução que apoiem a escolha da solução pelo tomador de decisão.

É descrita a experiência dos autores na utilização dos resultados do artigo para resolver diversas classes de problemas de sistemas de potência, incluindo problemas que exigem a agregação de informações provenientes de diversas fontes. Essa experiência demonstra de forma convincente diversas vantagens da aplicação da matemática *fuzzy* em problemas de otimização e tomada de decisão em engenharia de energia.

Referências

- AMAN, M. M. *et al.* Optimum network reconfiguration based on maximization of system loadability using continuation power flow theorem. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, v. 54, p. 123-133, Jan. 2014.
- BELIAKOV, G.; WARREN, J. Appropriate choice of aggregation operators in fuzzy decision support systems. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, v. 9, n. 6, p. 773-784, Dec. 2001.
- BELLMAN, R.; GIERTZ, M. On the analytic formalism of the theory of fuzzy sets. **Information Sciences**, v. 5, p. 149-157, 1974.

- BELLMAN, R. E.; ZADEH, L. A. Decision-making in a fuzzy environment. **Management Science**, v. 17, n. 4, p. 141-164, 1970.
- BERREDO, R. C. *et al.* Decision making in fuzzy environment and multicriteria power engineering problems. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, v. 33, n. 3, p. 623-632, Mar. 2011.
- BOUYSSOU, D. Acyclic fuzzy preference and the Orlovski choice function: a note. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 89, n. 1, p. 107-111, Jul. 1997.
- BRANS, J. P.; VINCKE, Ph. A preference ranking organization method (the PROMETHEE method for multiple criteria decision-making). **Management Science**, v. 31, n. 6, p. 647-656, Jun. 1985.
- CHEN, C. B.; KLEIN, C. M. An efficient approach to solving fuzzy MADM problems. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 88, n. 1, p. 51-67, May 1997.
- CHEN, L. H.; LU, H. W. The preference order on fuzzy numbers. **Computers & Mathematics with Applications**, v. 44, p. 1455-1465, 2002.
- CHEN, S. J.; HWANG, C. L. **Fuzzy multiple attribute decision making**: methods and applications. Berlin: Springer-Verlag, 1992.
- CHENG, C. H. A new approach for ranking fuzzy numbers by distance methods. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 95, n. 1, p. 307-313, 1998.
- CHICLANA, F.; HERRERA, F.; HERRERA-VIEDMA, E. Integrating three representation models in fuzzy multipurpose decision making based on fuzzy preference relations. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 97, n. 1, p. 33-48, Jul. 1998.
- COELHO, C. A. C. Evolutionary multi-objective optimization: Critical review. *In*: SARKER, R.; MOHAMMADIAN, M.; YAO, X. (ed.). **Evolutionary optimization**. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2005. p. 117-146.
- DAMODARAN, A. **Strategic risk taking**: a framework for risk management. New Jersey: Pearson Prentice Hall, 2008.
- DELGADO, M. **Fuzzy optimization**: recent advances. Heidelberg: Physica-Verlag, 1994.
- DESTERCKE, S.; COUSO, I. Ranking of fuzzy intervals seen through the imprecise probabilistic lens. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 278, p. 20-39, 2015.
- DURBACH, I. N.; STEWART, T. J. Modeling uncertainty in multi-criteria decision analysis. **European Journal of Operational Research**, v. 223, n. 1, p. 1-14, Nov. 2012.
- EDGEWORTH, F. Y. **Mathematical physics**. London: P. Keegan, 1881.
- EHRGOTT, M. **Multicriteria optimization**. Berlin: Springer-Verlag, 2005.
- EKEL, P. Ya. Approach to decision making in fuzzy environment. **Computers & Mathematics with Applications**, v. 37, p. 59-71, 1999.

- EKEL, P. Ya. Fuzzy sets and models of decision making, **Computers & Mathematics with Applications**, v. 44, n. 7, p. 863-875, 2002.
- EKEL, P. Ya.; GALPERIN, E. A. Box-triangular multiobjective linear programs for resource allocation with application to load management and energy market problems. **Mathematical and Computer Modelling**, v. 37, n. 1/2, p. 1-17, Jan. 2003.
- EKEL, P. *et al.* Sensitivity and functionally oriented models for power system planning, operation, and control. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, v. 45, n. 1, p. 489-500, Feb. 2013.
- EKEL, P. Ya.; MARTINI, J. S. C.; PALHARES, R. M. Multicriteria analysis in decision making under information uncertainty. **Applied Mathematics and Computation**, v. 200, n. 2, p. 501-516, Jul. 2008.
- EKEL, P.; PEDRYCZ, W.; SCHINZINGER, R. A general approach to solving a wide class of fuzzy optimization problems. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 97, n. 1, p. 49-66, Jul. 1998.
- EKEL, P. Ya.; SCHUFFNER NETO, F. H. Algorithms of discrete optimization and their application to problems with fuzzy coefficients. **Information Sciences**, v. 176, n. 19, p. 2846-2868, 2006.
- FRENCH, S. Uncertainty and imprecision: modelling and analysis. **Journal of the Operational Research Society**, v. 46, n. 1, p. 70-79, 1995.
- FODOR, J.; ROUBENS, M. **Fuzzy Preference modelling and multicriteria decision support**. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1994.
- GALPERIN, E. A.; EKEL, P. Ya. Synthetic realization approach to fuzzy global optimization via gamma algorithm. **Mathematical and Computer Modelling**, v. 41, n. 13, p. 1457-1468, Jun. 2005.
- HERRERA-VIEDMA, E. *et al.* A review of soft consensus models in a fuzzy environment, **Information Fusion**, v. 17, p. 4-13, May 2014.
- HERRERA-VIEDMA, E.; HERRERA, F.; CHICLANA, F. A consensus model for multiperson decision making with different preferences structures. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part A: Systems and Humans**, v. 32, n. 3, p. 394-402, May 2002.
- HORIUCHI, K.; TAMURA, N. VSOP fuzzy numbers and their fuzzy ordering. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 93, n. 2, p. 197-210, Jan. 1998.
- HWANG, C. L.; MASUD, A. S. **Multiple objective decision making: methods and applications**. Berlin: Springer-Verlag, 1979.
- HWANG, C. L.; YOON, K. **Multiple attribute decision making: methods and applications - a state-of-the-art survey**. Berlin: Springer-Verlag, 1981.
- KOKSHENEV, I. *et al.* A web-based decision support center for electrical energy companies. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, v. 23, n. 1, p. 16-28, Feb. 2015.

- KUMAR, K. S.; JAYABARATHI, T. Power system reconfiguration and loss minimization for an distribution systems using bacterial foraging optimization algorithm. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, v. 36, n. 1, p. 13-17, Mar. 2012.
- LEE-KWANG, H. A method for ranking fuzzy numbers and its application to decision-making. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, v. 7, n. 6, p. 677-685, Dec. 1999.
- LIU, X. W.; HAN, S. L. Orness and parameterized RIM quantifier aggregation with OWA operators: a summary. **International Journal of Approximate Reasoning**, v. 48, n. 1, p. 77-97, Apr. 2008.
- LUCE, R. D.; RAIFFA, H. **Games and decisions**. New York: John Wiley & Sons, 1957.
- MARTINEZ, L.; RUAN, D.; HERRERA, F. Computing with words in decision support systems: An overview on models and applications. **International Journal of Computational Intelligence Systems**, v. 3, n. 4, p. 382-395, May 2010.
- ORLOVSKI, S. A. Decision-making with a fuzzy preference relation. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 1, n. 3, p. 155-167, Jul. 1978.
- ORLOVSKI, S. A. **Problems of decision making with fuzzy information**. Nauka: Moscow, 1981. (In Russian).
- PALOMARES, I. *et al.* Modelling experts'attitudes in group decision making. **Soft Computing**, v. 16, p. 1755-1766, May 2012.
- PARETO, V. **Cours d'economie politique**. Lousanne: Lousanne Rouge, 1886.
- PARREIRAS, R.; EKEL, P. Construction of nonreciprocal fuzzy preference relations with the use of preference functions. **Pesquisa Operacional**, v. 33, n. 2, p. 305-323, Aug. 2013.
- PARREIRAS, R.O.; EKEL, P. Ya. Fuzzy preference based organizational performance measurement. *In*: WATADA J. *et al.* (ed.). **Intelligent decision technologies**. Berlin: Springer Verlag, 2011. p. 459-468.
- PARREIRAS, R.; EKEL, P.; BERNANDES JR., F. A dynamic consensus scheme based on a nonreciprocal fuzzy preference relation modeling. **Information Sciences**, v. 211, p. 1-17, Nov. 2012.
- PARREIRAS, R. O. *et al.* A flexible consensus scheme for multicriteria group decision making under linguistic assessments. **Information Sciences**, v. 180, n. 7, p. 1075-1089, 2010.
- PARREIRAS, R. O.; EKEL, P. Ya.; MORAIS, D. C. Fuzzy set based consensus schemes for multicriteria group decision making applied to strategic planning. **Group Decision and Negotiation**, v. 21, p. 153-183, 2012.
- PEDRYCZ, W.; EKEL, P.; PARREIRAS, R. **Fuzzy multicriteria decision-making: models, methods, and applications**. Chichester: John Wiley & Sons, 2011.

- PEDRYCZ, W.; GOMIDE, F. **An introduction to fuzzy sets: analysis and design**. Cambridge, MA: MIT Press, 1998.
- PEREIRA JR., J. G. *et al.* On multicriteria decision making under conditions of uncertainty. **Information Sciences**, v. 324, p. 44-59, Dec. 2015.
- RAIFFA, H. **Decision analysis**. Reading: Addison-Wesley, 1968.
- RODRIGUEZ, R. M.; MARTINEZ, L. An analysis of symbolic linguistic computing models in decision making, **International Journal of General Systems**, v. 42, n. 1, p. 121-136, 2013.
- SAADI-NEZHAD, S.; SHAHNAZARI-SHAHREZAEI, P. Ranking fuzzy numbers using preference ratio: a utility function approach. **Decision Science Letters**, v. 2, p. 149-162, 2013.
- SENGUPTA, K. Fuzzy preference and Orlovsky choice procedure. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 93, n. 1, p. 231-234, Jan. 1998.
- STEWART, T. Dealing with uncertainties in MCDA. *In*: FIGUEIRA, J.; GRECO, S.; EHRGOTT, M. (ed.). **Multiple criteria decision analysis: state of the art annotated surveys**. New York: Springer, 2005. p. 445-470. (International Series in Operations Research and Management Science).
- TSENG, T.Y.; KLEIN, C. M. New algorithm for the ranking procedure in fuzzy decision making. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics**, v. 19, n. 5, p. 1289-1296, Sep./Oct. 1989.
- WANG, X.; KERRE, E. E. Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (I), **Fuzzy Sets and Systems**, v. 118, n. 3, p. 375-385, Mar. 2001.
- WANG, X.; KERRE, E. E. Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (II), **Fuzzy Sets and Systems**, v. 118, n. 3, p. 387-405, Mar. 2001.
- YAGER, R. R. On ordered weighted averaging operators in multicriteria decision making, **IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics**, v. 18, n. 1, p. 183-190, Jan./Feb. 1988.
- ZHANG, Q.; CHENA, J. C. H.; CHONG, P. P. Decision consolidation: criteria weight determination using multiple preference formats. **Decision Support Systems**, v. 38, n. 2, p. 247-258, Nov. 2004.
- ZHANG, Q.; WANG, Y.; YANG, Y. Fuzzy multiple attribute decision making with eight types of preference information. *In*: IEEE SYMPOSIUM ON COMPUTATIONAL INTELLIGENCE IN MULTICRITERIA DECISION MAKING, 2007, Honolulu, Hawaii. **Proceedings [...]**. Piscataway: IEEE, 2007. p. 288-293.
- ZHU, J. **Optimization of power system operation**. Hoboken: John Wiley & Sons, 2009.
- ZIMMERMANN, H. J. **Fuzzy set theory and its application**. 4. ed. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2001.

Tomada de decisão multicritério em condições de incerteza na aplicação de alocação multiobjetiva de recursos⁴

Felipe Diniz Ramalho, Petr Iakovlevitch Ekel, Witold Pedrycz, Joel Gomes Pereira Júnior, Gustavo Luís Soares, Natã Oliveira Sousa

1. Introdução

Entre diversas questões (“Onde estamos?”, “Para onde queremos ir?”, “O que vamos enfrentar?”, “O que fazer?”, “Como fazer?”, “Como estamos indo?”) relacionadas a diferentes tipos de atividades de planejamento (planejamento estratégico, de inovação, de novos negócios, de pesquisa e desenvolvimento, de expansão, de manutenção, etc.) surgem sempre duas questões fundamentais: “O que fazer?” e “Como fazer?”.

Para elaborar as respostas à primeira questão fundamental (“O que fazer?”) para alguma organização, conselho de administração, departamento etc., normalmente torna-se necessário:

- definir objetivos e estabelecer metas para os níveis correspondentes da hierarquia de planejamento;
- avaliar, comparar, escolher, priorizar e/ou solicitar soluções ou alternativas (ações estratégicas, projetos de inovação, projetos de novos negócios, projetos de pesquisa e desenvolvimento, planos de expansão, ações de manutenção etc.).

As respostas à primeira questão fundamental deverão basear-se no processamento de informações relativas a diferentes perspectivas ou critérios, tais como “atratividade do investimento”, “nível de inovação”, “efeito político”, “nível de originalidade”, “eficiência de expansão”, “flexibilidade de manutenção” etc. Levando isso em consideração, será necessário avaliação, comparação, escolha, priorização e/ou ordenação de soluções ou alternativas, considerando tanto informações quantitativas (baseadas em grandezas mensuráveis com diferentes níveis de incerteza) quanto informações qualitativas (baseada no conhecimento, experiência e intuição dos especialistas envolvidos). As respostas à primeira questão fundamental podem ser elaboradas através da construção e análise de modelos $\langle X, R \rangle$ (Ekel, 2002; Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011), associados à avaliação, comparação, escolha, priorização e/ou ordenação de soluções ou alternativas de um conjunto discreto X com base em um vetor R de relações de preferência difusas e aplicadas como modelos de tomada de decisão multiatributo (Hwang; Yoon, 1981).

A segunda questão fundamental (“Como fazer?”), que, em muitos casos, também pode ser independente da primeira questão fundamental, está associada à alocação racional de vários tipos de recursos (financeiros, humanos, logísticos etc.) ou de sua escassez entre soluções ou alternativas (ações estratégicas, projetos de inovação, projetos de novos negócios, projetos de pesquisa e desenvolvimento, planos de expansão, ações

⁴ **Reconhecimento:** A versão de registro deste artigo está publicada na *Information Sciences*, e está disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.ins.2015.06.01.030>.

RAMALHO, F. D. et al. Multicriteria decision making under conditions of uncertainty in application to multiobjective allocation of resources. *Information Fusion*, v. 49, p. 249-261, Sep. 2019.

de manutenção etc.; para simplificar, consumidores) para atender ao máximo os objetivos e metas estabelecidos. Embora essa atribuição, vista de diferentes pontos de vista, se deva basear na aplicação de informação quantitativa e de informação qualitativa, na prática, é efetuada considerando apenas a informação quantitativa e, muitas vezes, ignorando completamente a sua incerteza. Sendo assim, em (Stewart, 2005), sublinha-se que os modelos de tomada de decisão multicritério baseiam-se em avaliações essencialmente determinísticas das consequências de cada ação expressas em termos de cada critério, podendo sujeitar os resultados e recomendações a certo grau de análise de sensibilidade. Essa abordagem pode ser justificada quando a principal fonte de complexidade na tomada de decisões está associada à natureza multicritério do problema e não à natureza incerta das consequências individuais. No entanto, surgem situações, por exemplo, em problemas de planeamento estratégico, em que os riscos e as incertezas são tão críticos quanto questões de objetivos de gestão conflitantes. Nessas situações, torna-se necessária uma modelagem mais formal das incertezas (Stewart, 2005).

Considerando as observações anteriores, é importante notar que a construção e análise de modelos $\langle X, F \rangle$ (Ekel, 2002; Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011) (associadas à escolha de soluções ou alternativas de um conjunto X baseadas em um vetor F de funções objetivo e aplicadas como modelos de tomada de decisão multiobjetivo (Hwang; Masud, 1979), combinadas com os resultados de (Ekel *et al.*, 2016; Ekel; Martini; Palhares, 2008; Pereira Jr *et al.*, 2015), podem fornecer respostas completas para a segunda questão fundamental.

Em particular, foi sublinhada (Roy, 2010) a necessidade de se produzir soluções robustas na análise de modelos multicritérios. Os resultados em (Ekel *et al.*, 2016; Ekel; Martini; Palhares, 2008; Pereira Jr *et al.*, 2015), associados à generalização baseada em conjuntos difusos da abordagem clássica (Luce; Raiffa, 1957; Raiffa, 1968; Webster, 2003) para lidar com a incerteza da informação na tomada de decisão monocritério para problemas multicritério, podem servir para esse propósito. Esses resultados estão associados à combinação de dois ramos da matemática da incerteza: elementos da teoria dos jogos e teoria dos conjuntos difusos. Eles permitem realizar análises multicritério em condições de incerteza, com base na abordagem possibilística (considerando combinações representativas de dados iniciais, estados da natureza ou cenários), de acordo com o esquema geral (Pereira Jr *et al.*, 2015), dirigido à utilização da informação quantitativa disponível em um grau máximo para reduzir as regiões de decisão com incertezas. Caso o poder de resolução do processamento da informação quantitativa não permita a obtenção de soluções únicas, o esquema pressupõe a aplicação de informação de caráter qualitativo (baseada no conhecimento, experiência e intuição dos especialistas envolvidos) na fase final da tomada de decisão.

No entanto, cada vez mais, nos últimos anos, surgem problemas cuja essência exige a consideração de objetivos formados com base em informações qualitativas desde o início do processo de tomada de decisão (por exemplo, “atratividade do investimento”, “efeito político”, “flexibilidade de manutenção” etc.). Assim, o presente trabalho reflete resultados de pesquisas relacionadas à geração de soluções robustas com base na construção de combinações representativas de dados iniciais, estados da natureza ou cenários com o uso direto de informações qualitativas juntamente com informações

quantitativas, fornecendo mecanismos para a fusão de informações, aplicado à alocação multiobjetivo de recursos ou à sua escassez.

É possível falar da equivalência dos problemas de alocação de recursos e de alocação de suas carências, que são objeto do presente trabalho, sob diferentes pontos de vista (Ekel *et al.*, 2016; Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011). Contudo, como se mostra abaixo, a alocação da escassez de recursos permite realizar uma formulação e solução de problemas mais flexíveis e praticamente mais significativas.

Uma das questões fundamentais na aplicação de uma abordagem multiobjectivo é a construção de funções objetivo com base nos objetivos correspondentes definidos pelo decisor (DM) ou, por exemplo, com base em objetivos estratégicos específicos, definidos por mapas estratégicos no caso da utilização da metodologia Balanced Scorecard (BSC) para planejamento estratégico (Kaplan; Norton, 1996, 2004).

Levando em consideração o exposto, este trabalho também propõe uma abordagem homogênea, clara e aceitável para qualquer especialista, envolvido no processo de tomada de decisão, de formulação de objetivos específicos, que serve para a construção de funções objetivo para os modelos multiobjetivo.

2. Declaração do problema

Considerando que o artigo é dedicado ao problema da alocação de recursos, é necessário identificar que os métodos que levam à sua solução, baseados em princípios fundamentais de alocação (alocação proporcional, alocação ótima e princípio das prioridades inversas (Burkov; Kondrat'ev, 1981) apresentam desvantagens significativas (Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011). Eles poderiam ser eliminados através da adoção de uma abordagem multicritério, que permita considerar e maximizar diversas consequências positivas ou minimizar diversas consequências negativas da alocação de recursos ou da sua escassez. Os nossos primeiros resultados nessa área estão relacionados com a resolução do conjunto de problemas de alocação de potência e escassez de energia para diferentes níveis de hierarquias territoriais, temporais e situacionais de gestão de carga, geradas pelos impactos do desastre de Chernobyl (Sklyarov; Prakhovnik; Ekel, 1987). Esses resultados foram implementados em um sistema computacional utilizado em concessionárias de energia para alocação de energia e escassez de energia, minimizando as consequências tecnológicas, econômicas, ambientais e sociais associadas à limitação de consumidores.

Duas classes de problemas inter-relacionados são discutidas abaixo:

- alocação multiobjetivo de recursos;
- alocação multiobjetivo de escassez de recursos.

Para a primeira classe de problemas, o homogêneo, claro e aceitável para especialistas, participantes do processo de tomada de decisão, formulação de objetivos específicos, por exemplo, para planejamento estratégico, pode ser o seguinte:

- maior disponibilização financeira para projetos geradores de maior oferta de produtos no exterior;

- maior provisão financeira para projetos que gerem maior nível de lucro para cada US\$ 1.000.000 investidos.

Esses objetivos podem ser apoiados por informações quantitativas. Ao mesmo tempo, o objetivo, que pode ser apoiado por informações qualitativas, por exemplo, é o seguinte:

- maior disponibilização financeira para projetos geradores de maior nível de inovação.

Essa forma de formulação dos objetivos específicos deve ser sublinhada dado o seu caráter universal. Por exemplo, os seguintes objetivos podem ser formulados para áreas muito diferentes de planejamento de manutenção em sistemas de distribuição:

- maior disponibilização de equipes de reparos para regiões com maior extensão de linhas de distribuição;
- maior disponibilização de equipas de reparação para regiões com grande número de consumidores por 1km².

O objetivo do planejamento da manutenção, que pode ser apoiado por informações qualitativas, poderia ser articulado da seguinte forma:

- maior disponibilização de equipes de reparos para regiões com maior nível de complexidade de manutenção.

No caso de alocação multiobjetivo de escassez de recursos, os objetivos do planejamento estratégico poderão ser apresentados da seguinte forma:

- maior restrição financeira para projetos que gerem menor nível de oferta de produtos no exterior;
- maior restrição financeira para projetos que geram menor nível de lucro para cada US\$1.000.000,00 investidos;
- maior restrição financeira para projetos que geram um menor nível de inovação.

Ao mesmo tempo, no caso de alocação de escassez de recursos para planejamento de manutenção em sistemas de distribuição, podem ser formulados os seguintes objetivos:

- maior restrição de equipes de reparo para regiões com menor extensão de linhas de distribuição;
- maior restrição de equipes de reparo para regiões com menor número de consumidores por 1km²;
- maior restrição de equipes de reparo para regiões com menor nível de complexidade de manutenção.

$$F_p(X) = \sum_{i=1}^n c_{pi}x_i, \quad p = 1, 2, \dots, q \quad (1)$$

onde $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, são as variáveis, que correspondem aos volumes de recursos procurados destinados ao i -ésimo consumidor; $c_{pi}, p = 1, 2, \dots, q, i = 1, 2, \dots, n$ são

indicadores específicos, que correspondem ao p -ésimo objetivo específico, para o i -ésimo consumidor.

Ao mesmo tempo, a satisfação dos objetivos no caso de alocação multiobjetivo de escassez de recursos está associada à maximização ou minimização das funções objetivo lineares

$$F_p(\Delta X) = \sum_{i=1}^n c_{pi} \Delta x_i, \quad p = 1, 2, \dots, q \quad (2)$$

onde $\Delta x_i, i = 1, 2, \dots, n$ são as variáveis, que correspondem as limitações procuradas dos volumes de recursos destinados à i -ésima ação estratégica, projeto de inovação, projeto de novos negócios etc.

As funções objetivo (1) e (2) não são o único tipo de funções objetivo, que podem ser utilizadas na alocação multiobjetivo de recursos ou na sua escassez. Em particular, em Sklyarov; Prakhovnik; Ekel (1987), são considerados outros tipos de funções objetivo que podem refletir melhor a essência de objetivos específicos.

Três modelos de alocação de recursos ou sua escassez são discutidos abaixo.

2.1. Modelo 1: Alocação de recursos disponíveis

Dadas as demandas $D_i, i = 1, 2, \dots, n$ de consumidores e um recurso total disponível $R < \sum_{i=1}^n D_i$. Então, o problema apresenta a seguinte estrutura:

$$F_p(X) \Rightarrow \max_{X \in L} \text{ ou } \min_{X \in L}, \quad p = 1, 2, \dots, q \quad (3)$$

sujeito às restrições

$$0 \leq x_i \leq D_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

e

$$\sum_{i=1}^n x_i = R \quad (5)$$

2.2. Modelo 2: Alocação de escassez de recursos com cortes ilimitados

As demandas $D_i, i = 1, 2, \dots, n$, dos consumidores são dadas, bem como um recurso total disponível $R < \sum_{i=1}^n D_i$. Então, a escassez de recursos é $A = \sum_{i=1}^n D_i - R$ e o problema tem a seguinte estrutura:

$$F_p(\Delta X) \Rightarrow \max_{X \in L} \text{ ou } \min_{X \in L}, \quad p = 1, 2, \dots, q \quad (6)$$

sujeito às restrições

$$\Delta x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

e

$$\sum_{i=1}^n \Delta x_i = A \quad (8)$$

2.3. Modelo 3: Alocação de escassez de recursos com cortes limitados

Dadas as demandas $D_i, i = 1, 2, \dots, n$ bem como as exigências minimamente aceitáveis $D_i^m, i = 1, 2, \dots, n$ dos consumidores. O problema é alcançar (6), levando em conta as restrições

$$0 \leq \Delta x_i \leq A_i = D_i - D_i^m, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

e (8).

3. Solução do problema na presença de informações determinísticas

Ao analisar modelos $\langle X, F \rangle$, um vetor de funções objetivo $F(X) \{F_1(X), F_2(X), \dots, F_p(X), \dots, F_q(X)\}$ é considerado, e o problema consiste em uma otimização simultânea de todos eles, ou seja,

$$F_p(X) \rightarrow \underset{X \in L}{\text{extr}}, \quad p = 1, 2, \dots, q \quad (10)$$

onde L é uma região viável em R^n .

A etapa formal na análise de (10) é a determinação de um conjunto de soluções ótimas de Pareto $\Omega \subseteq L$ (Ehrgott, 2005; Hwang; Masud, 1979). A noção desse conjunto foi proposta em (Edgeworth, 1881) e generalizada em (Pareto, 1886). Essa etapa é útil, mas não permite gerar soluções únicas. Aplicando informações fornecidas pelo responsável por tomar a decisão (DM), é possível escolher uma determinada solução de Pareto. Existem três abordagens para se utilizar as informações fornecidas pelo DM (Coelho, 2005; Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011): *a priori*, *a posteriori* e adaptativa. Ao se aplicar a abordagem adaptativa, a melhoria sucessiva da qualidade da solução é realizada à medida que transições de $X_\alpha^0 \in \Omega \subseteq L$ para $X_{\alpha+1}^0 \in \Omega \subseteq L$ acontecem, quando consideradas informações I_α do DM na etapa α .

Na solução dos problemas multiobjetivos, é necessário desenvolver respostas para questões de normalização de funções objetivo, escolher princípios de otimalidade e considerar prioridades para as funções objetivo. A resolução dessa classe de problemas e, conseqüentemente, o desenvolvimento de métodos multiobjetivos, são realizados em diversas frentes (por exemplo, Ehrgott (2005); Hwang e Masud (1979); Pedrycz, Ekel e Parreiras (2011): métodos de escalarização; métodos baseados na colocação de restrições em funções objetivo, incluindo técnicas lexicográficas; métodos de programação de metas e de critério global; métodos baseados na utilização do princípio do resultado garantido. Sem discutir as vantagens e desvantagens dessas frentes, é necessário indicar dois momentos importantes.

O primeiro momento está relacionado à capacidade dos métodos baseados na imposição de restrições em níveis de funções objetivo e métodos de programação de metas em gerar soluções que não são ótimas de Pareto. Isso transgredir a concepção fundamental da tomada de decisão multiobjetivo.

O segundo momento está relacionado a uma questão importante na análise de problemas multiobjetivos, associada à qualidade da solução. Essa qualidade pode ser

considerada alta se os níveis de satisfação dos objetivos forem iguais ou próximos entre si (produzindo a noção de soluções harmoniosas (Ekel, 2002; Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011) quando os níveis de importância dos objetivos forem iguais. Esta noção pode ser estendida para o caso em que os níveis de importância das funções objetivo são diferentes (Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011). Considerando isso, cabe ressaltar a validade e adequação da orientação relativa ao princípio do resultado garantido (Ekel, 2002; Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011). Outras frentes podem levar a soluções com altos níveis de satisfação de alguns objetivos, alcançadas por baixos níveis de satisfação de alguns outros objetivos (Ekel; Galperin, 2003; Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011).

A complexidade metodológica básica na resolução de problemas multiobjetivos é a falta de clareza do conceito de “solução multiobjetivo ótima”. Ao aplicar a abordagem Bellman-Zadeh à tomada de decisão em um ambiente difuso (Bellman; Zadeh, 1970; Pedrycz; Gomide, 1998) para resolver problemas multicritério, esse conceito é definido da seguinte forma: o grau máximo de atendimento aos objetivos servem como critério de otimalidade. Está em conformidade com o princípio do resultado garantido e permite gerar soluções harmoniosas. Como é mostrado em (Ekel, 2002; Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011), a aplicação da abordagem Bellman-Zadeh à tomada de decisão em um ambiente difuso permite realizar um método rigoroso (geração de soluções $X_\alpha^0 \in \Omega \subseteq L$) e computacionalmente eficaz para resolver problemas multiobjetivos. Sua aplicação também permite considerar índices, critérios e restrições de caráter qualitativo.

Ao aplicar a abordagem Bellman-Zadeh à tomada de decisão em um ambiente difuso para resolver problemas multiobjetivos, funções objetivo $F_p(X)$, $p = 1, 2, \dots, q$ são substituídos por conjuntos difusos $A_p = \{X, \mu_{A_p}(X)\}$, $p = 1, 2, \dots, q$, $X \in L$, que permitem construir uma solução difusa como uma interseção $D = \bigcap_{p=1}^q A_p$. Sua função de pertinência é expressa da seguinte forma:

$$\mu_D(X) = \min_{p=1,2,\dots,q} \mu_{A_p}(X), X \in L \quad (11)$$

Ressalta-se que a pertinência (11) pode ser modificada com o objetivo de ajustar o grau de otimismo-pessimismo na tomada de decisão. Em particular, isso poderia ser conseguido usando-se o operador de média ponderada ordenada (OWA), originalmente introduzido em (Yager, 1988). Porém, para não complicar a apresentação, não faremos isso, embora o operador OWA seja utilizado abaixo para outros fins.

O uso de (11) permite formar uma solução com

$$\max \mu_D(X) = \max_{X \in L} \min_{p=1,2,\dots,q} \mu_{A_p}(X) \quad (12)$$

reduzindo (10) a uma busca por

$$X^0 = \operatorname{argmax}_{X \in L} \min_{p=1,2,\dots,q} \mu_{A_p}(X) \quad (13)$$

Como funções de pertinência $\mu_{A_p}(X)$, $p = 1, 2, \dots, q$, podem ser expressas da seguinte forma (Bellman, Zadeh, 1970):

$$\mu_{A_p}(X) = \left[\frac{F_p(X) - \min_{X \in L} F_p(X)}{\max_{X \in L} F_p(X) - \min_{X \in L} F_p(X)} \right]^{\lambda_p} \quad (14)$$

para funções objetivo maximizadas e

$$\mu_{A_p}(X) = \left[\frac{\max_{X \in L} F_p(X) - F_p(X)}{\max_{X \in L} F_p(X) - \min_{X \in L} F_p(X)} \right]^{\lambda_p} \quad (15)$$

para funções objetivo minimizadas. Em (14) e (15), $\lambda_p, p = 1, 2, \dots, q$ são fatores de importância.

Como X^0 pertence a $\Omega \subseteq L$, é necessário construir

$$\bar{\mu}_D(X) = \min \left\{ \min_{p=1,2,\dots,q} \mu_{A_p}(X), \mu_\pi(X) \right\} \quad (16)$$

onde $\mu_\pi(X) = 1$ if $X \in \Omega$ and $\mu_\pi(X) = 0$ if $X \notin \Omega$.

Por fim, a presença de condições adicionais (índices, critérios e/ou restrições) de caráter qualitativo, consideradas com base em variáveis linguísticas (Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011; Pedrycz; Gomide, 1998), reduz (13) a

$$X^0 = \operatorname{argmax}_{X \in L} \min_{p=1,2,\dots,q+s} \mu_{A_p}(X) \quad (17)$$

onde $\mu_{A_p}(X), X \in L, p = q + 1, q + 2, \dots, s$ são as funções de pertinência de valores difusos de variáveis linguísticas que refletem as condições adicionais.

Os resultados relacionados à aplicação da abordagem Bellman-Zadeh na resolução de problemas multiobjetivos são aplicáveis para analisar todos os modelos de alocação multicritério de recursos ou de carências de recursos discutidos acima. Considere as características específicas dessa análise.

A análise do Modelo 1 (alocação de recursos disponíveis) é iterativa. Em particular, entre os consumidores que não receberam o volume de recursos requerido ($x_i < D_i$), é necessário escolher aquele com menor quantidade de recursos recebidos, retirá-lo da consideração e resolver o problema novamente. O procedimento deverá ser repetido que os consumidores remanescentes tenham suas demandas satisfeitas.

A análise do Modelo 2 (alocação de escassez de recursos com cortes ilimitados) também é iterativa. Entre os consumidores que não receberam o volume de recursos requerido ($x_i < D_i$), é necessário escolher aquele com maior corte de recursos, retirá-lo da consideração e resolver o problema novamente. O procedimento deverá ser repetido que os consumidores remanescentes tenham suas demandas satisfeitas.

O Modelo 3 (alocação de escassez de recursos com cortes limitados) é o mais flexível: permite diversas declarações de problemas. Geralmente, sua análise não é iterativa. No entanto, a necessidade de se negociar uma solução final em que $A_i = D_i - D_i^m, i = 1, 2, \dots, n$ pode transformar a análise em iterativa.

4. Consideração da incerteza da informação

Uma forma construtiva de lidar com o fator incerteza na tomada de decisão multiobjetivo (Ekel *et al.*, 2016; Ekel; Martini; Palhares, 2008; Pereira Jr *et al.*, 2015), baseada na abordagem possibilística (não probabilística), está associada à generalização da abordagem clássica para a tomada de decisão em condições de incerteza (Luce; Raiffa, 1957; Raiffa, 1968; Webster, 2003). Essa abordagem está associada à construção e análise das chamadas matrizes de *payoff*, refletindo efeitos que podem ser obtidos para diferentes combinações de alternativas de solução e combinações representativas de dados iniciais, estados de natureza ou cenários, para gerar soluções robustas. Sua aplicação está associada às seguintes etapas:

1. Formulação matemática do problema;
2. Construção das combinações representativas de dados iniciais, estados de natureza ou cenários;
3. Definição de alternativas de solução;
4. Construção de matrizes de *payoff*;
5. Análise de matrizes de *payoff* e escolha de soluções racionais.

4.1. Formulação matemática do problema

A incerteza dos dados iniciais requer a transformação das funções objetivo (1) e (2): elas devem incluir a correspondente descrição dos coeficientes. Neste trabalho, como tal descrição, utilizamos um intervalo, que encontrou uma ampla gama de aplicações (Zio; Pedrony, 2013). Levando isso em consideração, as funções objetivo (1) podem ser representadas da seguinte forma:

$$F_p(X) = \sum_{i=1}^n [c'_{pi}, c''_{pi}] x_i, \quad p = 1, 2, \dots, q \quad (18)$$

onde c'_{pi} e c''_{pi} são os valores mínimo e máximo, respectivamente, de c_{pi} , $p = 1, 2, \dots, q$, $i = 1, 2, \dots, n$.

De maneira semelhante, as funções objetivo (2) podem ser transformadas em

$$F_p(\Delta X) = \sum_{i=1}^n [c'_{pi}, c''_{pi}] \Delta x_i, \quad p = 1, \dots, q \quad (19)$$

4.2. Construção das combinações representativas de dados iniciais, estados de natureza ou cenários

Aqui, estamos preocupados em formar as combinações representativas de dados iniciais, estados de natureza ou cenários (geralmente, cenários).

As questões relacionadas com a construção dos cenários, como o seu número e a escolha das combinações representativas de dados, são de caráter geral e as respostas correspondentes variam de área para área. Geralmente, a principal condição na construção de cenários é que cada cenário seja a representação de uma realidade plausível (Durbach; Stewart, 2012).

Levando em consideração as recomendações elaboradas em Pedrycz, Ekel e Parreiras (2011), no presente trabalho, aplicamos as chamadas LP_τ -seqüências

(originalmente propostas em Sobol' (1979)) para construir os estados representativos dos dados iniciais. Essas sequências possuem características superiores de uniformidade quando comparadas com outras sequências uniformemente distribuídas (Sobol', 1979; Sobol'; Statnikov, 2006). Os resultados apresentados em Sobol' (1979) e em Sobol' e Statnikov (2006) fornecem pontos $Q_s, s = 1, 2, \dots, S$ (S é o número da combinação representativa de dados iniciais, estados da natureza ou cenários) com coordenadas $q_{st}, s = 1, 2, \dots, S, t = 1, 2, \dots, T$, no hipercubo unitário correspondente Q^T , onde T é o número de coeficientes de funções objetivo (por exemplo, $T = qn$ no caso de análise de problemas com as funções objetivo (1) ou (2)).

Em essência, a construção de estados representativos da natureza se reduz à formação de pontos de sequências uniformemente distribuídas Q^T e sua transformação em um hipercubo C^T definido pelos limites inferior $c'_t, t = 1, 2, \dots, T$ e superior $c''_t, t = 1, 2, \dots, T$ dos coeficientes correspondentes ($c'_{pi}, p = 1, 2, \dots, q, i = 1, 2, \dots, n$, e $c''_{pi}, p = 1, 2, \dots, q, i = 1, 2, \dots, n$, para as funções objetivo (1) e (2), respectivamente) como a seguir:

$$c_{st} = c'_t + (c''_t - c'_t)q_{st}, \quad s = 1, 2, \dots, S, t = 1, 2, \dots, T \quad (20)$$

para formar uma sequência uniformemente distribuída em C^T .

4.3. Definição de alternativas de solução

Considerando um determinado número S da combinação representativa de dados iniciais, estados da natureza ou cenários, as coordenadas dos pontos calculadas com o uso de (20) servem para a construção de S problemas de otimização multiobjetivo com coeficientes determinísticos. Considerando isso, com base em (1), por exemplo, as funções objetivo para cada cenário $Y_s, s = 1, \dots, S$ podem ser escritas na forma

$$F_p(X, Y_s) = \sum_{i=1}^n c_{pis} x_i, \quad p = 1, 2, \dots, q, s = 1, 2, \dots, S \quad (21)$$

Assim, utilizando (13) para resolver os problemas (21), é possível obter S soluções correspondentes a todos os cenários. Do conjunto de S soluções, um subconjunto de K diferentes soluções ($X_k, k = 1, 2, \dots, K$) são selecionadas para a construção de matrizes *payoff*.

4.4. Construção de matrizes de *payoff*

Considerando as alternativas de solução $X_k, k = 1, 2, \dots, K$ e a combinação representativa de dados iniciais, estados de natureza ou cenários $Y_s, s = 1, 2, \dots, S$, é possível construir a matriz *payoffs* na forma mostrada na Tabela 1. Ela reflete os efeitos (ou consequências) de uma ou outra alternativa de solução $X_k, k = 1, 2, \dots, K$ para a correspondente combinação representativa de dados iniciais, estado de natureza ou cenário $Y_s, s = 1, 2, \dots, S$.

Para obter a matriz *payoff* para qualquer p ($p = 1, 2, \dots, q$), aplica-se cada solução X_k ($k = 1, 2, \dots, K$) para cada $F_p(X, Y_s)$ ($p = 1, 2, \dots, q$) para todos Y_s ($s = 1, 2, \dots, S$).

Assim, podemos construir q matrizes *payoff*.

Tabela 1. Matriz *payoff* para a p -ésima função objetivo

	Y_1	...	Y_s	...	Y_S
X_1	$F_p(X_1, Y_1)$	...	$F_p(X_1, Y_s)$	...	$F_p(X_1, Y_S)$
...	...	...	...	...	...
X_k	$F_p(X_k, Y_1)$	...	$F_p(X_k, Y_s)$	...	$F_p(X_k, Y_S)$
...	...	...	...	...	...
X_K	$F_p(X_K, Y_1)$	...	$F_p(X_K, Y_s)$	...	$F_p(X_K, Y_S)$

4.5. Análise de matrizes *payoff* e escolha de soluções racionais

A análise das matrizes *payoff* e a escolha das alternativas de solução racionais baseiam-se na utilização dos chamados critérios de escolha (Luce; Raiffa, 1957; Raiffa, 1968; Webster, 2003). Neste trabalho, consideramos os critérios de escolha de Wald, Laplace, Savage e Hurwicz, que são de caráter geral e foram aplicados com sucesso (Belyaev, 1977; Webster, 2003) à tomada de decisão em condições de incerteza. Suas características, vantagens e desvantagens são consideradas em (Belyaev, 1977; Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011; Pereira Jr. *et al.*, 2015).

Os critérios de escolha baseiam-se na aplicação das seguintes estimativas características para cada $X_k, k = 1, 2, \dots, K$ para a p -ésima função objetivo:

- o nível mínimo de função objetivo

$$F_p^{\min}(X_k) = \min_{1 \leq s \leq S} F_p(X_k, Y_s) \quad (22)$$

que é a estimativa mais otimista se a função objetivo for minimizada ou a estimativa mais pessimista se a função objetivo for maximizada;

- o nível máximo da função objetivo

$$F_p^{\max}(X_k) = \max_{1 \leq s \leq S} F_p(X_k, Y_s) \quad (23)$$

que é a estimativa mais otimista se a função objetivo for maximizada ou a estimativa mais pessimista se a função objetivo for minimizada;

- o nível médio da função objetivo

$$\bar{F}_p(X_k) = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S F_p(X_k, Y_s) \quad (24)$$

- o nível máximo de arrependimento

$$R_p^{\max}(X_k) = \max_{1 \leq s \leq S} R_p(X_k, Y_s) \quad (25)$$

onde $R_p(X_k, Y_s)$ é um gasto excessivo sob a combinação do cenário Y_s e a escolha da alternativa de solução X_k em vez da alternativa de solução que é localmente ótima para esse Y_s .

Para determinar os arrependimentos $R_p(X_k, Y_s)$ basta definir o valor mínimo da função objetivo, caso esta seja minimizada (como na Tabela 1), para cada cenário Y_s (para cada coluna da matriz de *payoff*):

$$F_p^{\min}(Y_s) = \min_{1 \leq k \leq K} F_p(X_k, Y_s) \quad (26)$$

Para maximizar a função objetivo, basta definir o seu valor máximo para cada cenário Y_s (para cada coluna da matriz de *payoff*):

$$F_p^{\max}(Y_s) = \max_{1 \leq k \leq K} F_p(X_k, Y_s) \quad (27)$$

O arrependimento por qualquer alternativa de solução X_k e qualquer estado de natureza Y_s pode ser avaliado como

$$R_p(X_k, Y_s) = F_p(X_k, Y_s) - F_p^{\min}(Y_s) \quad (28)$$

se a função objetivo (indicador, critério etc.) for minimizada ou

$$R_p(X_k, Y_s) = F_p^{\max}(Y_s) - F_p(X_k, Y_s) \quad (29)$$

se estiver maximizado.

Considerando (22)-(29) e a matriz *payoff* mostrada na Tabela 1, pode-se construir uma matriz com as estimativas características para a p -ésima função objetivo conforme apresentado na Tabela 2.

Tabela 2. Matriz com as estimativas características da p -ésima função objetivo

	$F_p^{\max}(X_k)$	$F_p^{\min}(X_k)$	$\bar{F}_p(X_k)$	$R_p^{\max}(X_k)$
X_1	$F_p^{\max}(X_1)$	$F_p^{\min}(X_1)$	$\bar{F}_p(X_1)$	$R_p^{\max}(X_1)$
...	...	...	...	...
X_k	$F_p^{\max}(X_k)$	$F_p^{\min}(X_k)$	$\bar{F}_p(X_k)$	$R_p^{\max}(X_k)$
...	...	...	...	...
X_K	$F_p^{\max}(X_K)$	$F_p^{\min}(X_K)$	$\bar{F}_p(X_K)$	$R_p^{\max}(X_K)$

Os critérios de escolha de Wald, Laplace, Savage e Hurwicz baseiam-se na utilização das estimativas características $F_p^{\max}(X_k)$, $F_p^{\min}(X_k)$, $\bar{F}_p(X_k)$ e $R_p^{\max}(X_k)$. Assim, os critérios de escolha apresentados a seguir partem do pressuposto de que as funções objetivo devem ser minimizadas.

O critério de Wald utiliza a estimativa $F_p^{\max}(X_k)$ e permite escolher as alternativas de solução X^W , para as quais esta estimativa atinge o mínimo:

$$\min_{1 \leq k \leq K} F_p^{\max}(Y_s) = \min_{1 \leq k \leq K} \max_{1 \leq s \leq S} F(X_k, Y_s) \quad (30)$$

O critério de Laplace é baseado na estimativa $\bar{F}(X_k)$ e está focado na escolha das alternativas de solução X^L , para as quais esta estimativa é mínima:

$$\min_{1 \leq k \leq K} \bar{F}(X_k) = \min_{1 \leq k \leq K} \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S F(X_k, Y_s) \quad (31)$$

O critério de Savage está associado à aplicação da estimativa $R^{\max}(X_k)$ e permite escolher as alternativas de solução X^S , fornecendo o mínimo para esta estimativa:

$$\min_{1 \leq k \leq K} R^{\max}(X_k) = \min_{1 \leq k \leq K} \max_{1 \leq s \leq S} R(X_k, Y_s) \quad (32)$$

O critério de Hurwicz utiliza uma combinação convexa de $F^{\max}(X_k)$ e $F^{\min}(X_k)$, permitindo escolher as alternativas de solução X^H , para as quais esta combinação é mínima:

$$\min_{1 \leq k \leq K} [\alpha F^{\max}(X_k) + (1 - \alpha) F^{\min}(X_k)] = \min_{1 \leq k \leq K} \quad (33)$$

A abordagem clássica para lidar com a incerteza da informação é voltada à análise dos critérios de Wald, Laplace, Savage e Hurwicz para uma determinada função objetivo em um ambiente com diversos cenários $Y_s, s = 1, 2, \dots, S$. Assim, considerando que cada critério de escolha está associado às estimativas características definidas por (22)-(25), pode-se considerar os critérios de escolha (30)-(33) como funções objetivo para a p -ésima função objetivo:

$$F_p^W(X_k) = F_p^{\max}(X_k) = \max_{1 \leq s \leq S} F_p(X_k, Y_s) \quad (34)$$

$$F_p^L(X_k) = \bar{F}_p(X_k) = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S F_p(X_k, Y_s) \quad (35)$$

$$F_p^S(X_k) = R_p^{\max}(X_k) = \max_{1 \leq s \leq S} R_p(X_k, Y_s) \quad (36)$$

e

$$F_p^H(X_k) = \alpha F_p^{\max}(X_k) + (1 - \alpha) F_p^{\min}(X_k) = \alpha \max_{1 \leq s \leq S} F_p(X_k, Y_s) + (1 - \alpha) \min_{1 \leq s \leq S} F_p(X_k, Y_s) \quad (37)$$

A representação dos critérios de escolha como funções objetivo permite construir $M \leq 4$ problemas (de acordo com o número de critérios de escolha aplicados) da seguinte forma:

$$F_{r,p}(X) \rightarrow \underset{X \in L}{\text{extr}}, \quad r = 1, 2, \dots, M \leq 4, p = 1, 2, \dots, q \quad (38)$$

onde $F_{1,p}(X) = F_p^W(X_k)$, $F_{2,p}(X) = F_p^L(X_k)$, $F_{3,p}(X) = F_p^S(X_k)$, e $F_{4,p}(X) = F_p^H(X_k)$.

Aplicando (38) às q matrizes com estimativas características (Tabela 2), é possível construir as q matrizes com estimativas de critérios de escolha mostradas na Tabela 3, que refletem o desempenho de cada alternativa de solução com base nos critérios de escolha de Wald, Laplace, Savage e Hurwicz.

Tabela 3. Matriz com as estimativas dos critérios de escolha para a p -ésima função objetivo

	$F_p^W(X_k)$	$F_p^L(X_k)$	$F_p^S(X_k)$	$F_p^H(X_k)$
X_1	$F_p^W(X_1)$	$F_p^L(X_1)$	$F_p^S(X_1)$	$F_p^H(X_1)$
...	...	...	...	...
X_k	$F_p^W(X_k)$	$F_p^L(X_k)$	$F_p^S(X_k)$	$F_p^H(X_k)$
...	...	...	...	...
X_K	$F_p^W(X_K)$	$F_p^L(X_K)$	$F_p^S(X_K)$	$F_p^H(X_K)$
	$\min_{1 \leq k \leq K} F_p^W(X_k)$	$\min_{1 \leq k \leq K} F_p^L(X_k)$	$\min_{1 \leq k \leq K} F_p^S(X_k)$	$\min_{1 \leq k \leq K} F_p^H(X_k)$
	$\max_{1 \leq k \leq K} F_p^W(X_k)$	$\max_{1 \leq k \leq K} F_p^L(X_k)$	$\max_{1 \leq k \leq K} F_p^S(X_k)$	$\max_{1 \leq k \leq K} F_p^H(X_k)$

Do ponto de vista mono-objetivo, a matriz com os níveis de critérios de escolha apresentada na Tabela 3 contém informações para a tomada de decisão, uma vez que é possível escolher a alternativa de solução para uma determinada p -ésima função objetivo com base nas alternativas de solução que fornecem os valores mínimos de $F_p^W(X_k)$, $F_p^L(X_k)$, $F_p^S(X_k)$, e $F_p^H(X_k)$.

Do ponto de vista multiobjetivo, podem-se utilizar os resultados apresentados na Seção 3 para se analisarem problemas multiobjetivo sob incerteza. Isto pode ser conseguido aplicando (14) ou (15) à matriz com os níveis de critérios de escolha da Tabela 3 para construir as funções de pertinência para $F_{r,p}(X)$, $r = 1, 2, \dots, M$ para se obter os níveis de critérios de escolha difusos para a p -ésima função objetivo. Assim, utilizando q matrizes com os níveis dos critérios de escolha, é possível construir q matrizes modificadas dos níveis dos critérios de escolha, conforme mostra a Tabela 4.

Continuando a análise multiobjetivo com os dados da Tabela 4, pode-se aplicar (11) para X_k , $k = 1, 2, \dots, K$ para se construir a matriz com níveis agregados de critérios de escolha difusos (lembre-se de que (11) pode ser modificado com o uso do operador OWA (Yager, 1988), como mostrado na Tabela 5. Por fim, utiliza-se (12) considerando as estimativas apresentadas na Tabela 5 para encontrar as melhores alternativas de solução para cada critério de escolha. Com base em (13), as estimativas $\max_{1 \leq k \leq K} \mu_D^W(X_k)$, $\max_{1 \leq k \leq K} \mu_D^L(X_k)$, $\max_{1 \leq k \leq K} \mu_D^S(X_k)$ e $\max_{1 \leq k \leq K} \mu_D^H(X_k)$ levam a X^W , X^L , X^S , e X^H , respectivamente.

A análise multiobjetivo, realizada dessa forma, é eficaz para lidar com a incerteza e garante a escolha das alternativas de solução racionais de acordo com o princípio da otimalidade de Pareto (Ekel *et al.*, 2016; Pereira Jr *et al.*, 2015).

Tabela 4. Matriz modificada com as estimativas dos critérios de escolha para a p -ésima função objetivo.

	$\mu_{A_p}^W(X_k)$	$\mu_{A_p}^L(X_k)$	$\mu_{A_p}^S(X_k)$	$\mu_{A_p}^H(X_k)$
X_1	$\mu_{A_p}^W(X_1)$	$\mu_{A_p}^L(X_1)$	$\mu_{A_p}^S(X_1)$	$\mu_{A_p}^H(X_1)$
...	...	...	...	...
X_k	$\mu_{A_p}^W(X_k)$	$\mu_{A_p}^L(X_k)$	$\mu_{A_p}^S(X_k)$	$\mu_{A_p}^H(X_k)$
...	...	...	...	...
X_K	$\mu_{A_p}^W(X_K)$	$\mu_{A_p}^L(X_K)$	$\mu_{A_p}^S(X_K)$	$\mu_{A_p}^H(X_K)$

Tabela 5. Matriz com os níveis agregados dos critérios de escolha difusos

	$\mu_D^W(X_k)$	$\mu_D^L(X_k)$	$\mu_D^S(X_k)$	$\mu_D^H(X_k)$
X_1	$\mu_D^W(X_1)$	$\mu_D^L(X_1)$	$\mu_D^S(X_1)$	$\mu_D^H(X_1)$
...	...	...	...	...
X_k	$\mu_D^W(X_k)$	$\mu_D^L(X_k)$	$\mu_D^S(X_k)$	$\mu_D^H(X_k)$
...	...	...	...	...
X_K	$\mu_D^W(X_K)$	$\mu_D^L(X_K)$	$\mu_D^S(X_K)$	$\mu_D^H(X_K)$
	$\max_{1 \leq k \leq K} \mu_D^W(X_k)$	$\max_{1 \leq k \leq K} \mu_D^L(X_k)$	$\max_{1 \leq k \leq K} \mu_D^S(X_k)$	$\max_{1 \leq k \leq K} \mu_D^H(X_k)$

5. Exemplo de aplicação

Como exemplo ilustrativo, consideremos o problema da alocação multiobjetivo da escassez de recursos financeiros no planejamento estratégico. O problema deverá ser resolvido para os quartos projetos no âmbito do *Modelo 3*, discutido acima.

Considerando o recurso disponível $R=52.000,00$ kU\$ e os dados da Tabela 6, não é difícil notar que $A = \sum_{i=1}^n D_i - R=58.927,00-52.000,00=6.927,00$.

Tabela 6. Informações iniciais para alocação de escassez de recursos financeiros

Projeto	D_i [kU\$]	D_i^m [kU\$]	A_i [kU\$]
1	12.532,00	10.020,00	2.512,00
2	17.528,00	16.130,00	1.398,00
3	9.744,00	7.768,00	1.976,00
4	19.132,00	16.230,00	2.910,00

Tabela 7. Informações iniciais para construção de funções objetivo

Projeto	$[c'_{1i}, c''_{1i}][\%]$	$[c'_{2i}, c''_{2i}][\text{kUS\$}]$
1	[20,5, 31,5]	[2.210,00, 2.850,00]
2	[42,5, 49,5]	[1.850,00, 2.350,00]
3	[25,5, 33,5]	[1.700,00, 1.950,00]
4	[10,5, 14,5]	[2.340,00, 2.950,00]

Assim, temos que considerar a seguinte restrição:

$$\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \Delta x_4 = 6,927.00 \quad (39)$$

Além disso, temos que levar em conta que:

$$0 \leq \Delta x_1 \leq 2,512.000 \quad (40)$$

$$0 \leq \Delta x_1 \leq 1,398.00 \quad (41)$$

$$0 \leq \Delta x_1 \leq 1,976.00 \quad (42)$$

e

$$0 \leq \Delta x_1 \leq 2,910.00 \quad (43)$$

Os objetivos são os seguintes:

- 1) Maior restrição financeira para projetos que gerem menor oferta de produtos no exterior.
- 2) Maior restrição financeira para projetos que gerem menor nível de lucro para cada US\$1.000.000,00 investidos.

As informações iniciais necessárias para a construção de funções objetivo correspondentes a esses objetivos são apresentadas na Tabela 7.

A aplicação de sequências LP_τ , considerando os limites inferior e superior dados na Tabela 7 permite gerar, por exemplo, $S = 7$:

$$F_{11}(\Delta X) = 26.000\Delta x_1 + 46.000\Delta x_2 + 29.500\Delta x_3 + 12.500\Delta x_4 \rightarrow \min \quad (44)$$

$$F_{12}(\Delta X) = 2,530.000\Delta x_1 + 2,100.000\Delta x_2 + 1,825.000\Delta x_3 + 2,645.000\Delta x_4 \rightarrow \min \quad (45)$$

$$F_{21}(\Delta X) = 23.250\Delta x_1 + 47.750\Delta x_2 + 27.500\Delta x_3 + 13.500\Delta x_4 \rightarrow \min \quad (46)$$

$$F_{22}(\Delta X) = 2,370.000\Delta x_1 + 2,225.000\Delta x_2 + 1,762.500\Delta x_3 + 2,797.500\Delta x_4 \rightarrow \min \quad (47)$$

$$F_{31}(\Delta X) = 28.750\Delta x_1 + 44.250\Delta x_2 + 31.500\Delta x_3 + 11.500\Delta x_4 \rightarrow \min \quad (48)$$

$$F_{32}(\Delta X) = 2,690.000\Delta x_1 + 1,975.000\Delta x_2 + 1,887.500\Delta x_3 + 2,492.500\Delta x_4 \rightarrow \min \quad (49)$$

$$F_{41}(\Delta X) = 21.875\Delta x_1 + 46.875\Delta x_2 + 32.500\Delta x_3 + 14.000\Delta x_4 \rightarrow \min \quad (50)$$

$$F_{42}(\Delta X) = 2,610.000\Delta x_1 + 1,912.500\Delta x_2 + 1,793.750\Delta x_3 + 2,568.750\Delta x_4 \rightarrow \min \quad (51)$$

$$F_{51}(\Delta X) = 27.375\Delta x_1 + 43.375\Delta x_2 + 28.500\Delta x_3 + 12.000\Delta x_4 \rightarrow \min \quad (52)$$

$$F_{52}(\Delta X) = 2,290.000\Delta x_1 + 2,162.500\Delta x_2 + 1,918.750\Delta x_3 + 2,873.750\Delta x_4 \rightarrow \min \quad (53)$$

$$F_{61}(\Delta X) = 24.625\Delta x_1 + 45.125\Delta x_2 + 30.500\Delta x_3 + 11.000\Delta x_4 \rightarrow \min \quad (54)$$

$$F_{62}(\Delta X) = 2,770.000\Delta x_1 + 2,287.500\Delta x_2 + 1,731.250\Delta x_3 + 2,721.250\Delta x_4 \rightarrow \min \quad (55)$$

$$F_{71}(\Delta X) = 30.125\Delta x_1 + 48.625\Delta x_2 + 26.500\Delta x_3 + 13.000\Delta x_4 \rightarrow \min \quad (56)$$

$$F_{72}(\Delta X) = 2,450.000\Delta x_1 + 2,037.500\Delta x_2 + 1,856.250\Delta x_3 + 2,416.250\Delta x_4 \rightarrow \min \quad (57)$$

que estão sujeitos às mesmas restrições (39)-(43).

Utilizando os resultados apresentados na Seção 3 para analisar estes problemas, deriva-se a solução dada na Tabela 8.

Tabela 8. Alternativas de solução para cenários $S=7$

s	Δx_1	Δx_2	Δx_3	Δx_4
1	1.681,214	642,887	1.976,000	2.626,899
2	1.971,689	360,733	1.976,000	2.618,578
3	2.083,692	340,168	1.976,000	2.527,139
4	2.221,119	69,114	1.976,000	2.660,768
5	2.244,887	185,166	1.976,000	2.520,947
6	2.440,874	59,381	1.976,000	2.450,745
7	2.512,000	183,686	1.976,000	2.255,314

Substituindo essas soluções em (44), (46), (48), (50), (52), (54) e (56), formamos a matriz *payoff* para a primeira função objetivo (Tabela 9). Substituindo essas soluções em (45), (47), (49), (51), (53), (55) e (57), formamos a matriz *payoff* para a segunda função objetivo (Tabela 10).

Tabela 9. Matriz de *payoff* para a primeira função objetivo

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7
ΔX_1	164.412	159.589	169.236	167.908	161.747	159.574	168.420
ΔX_2	158.881	152.757	165.006	160.920	157.360	153.903	163.343
ΔX_3	159.704	153.145	166.264	161.126	158.437	154.727	164.528
ΔX_4	152.479	145.201	159.758	153.297	152.046	147.350	157.225
ΔX_5	156.688	149.408	163.968	157.299	156.052	151.634	161.767
ΔX_6	155.120	147.010	163.230	154.708	155.119	150.012	160.642
ΔX_7	160.244	151.961	168.528	159.354	160.113	155.223	166.288

Tabela 10. Matriz de *payoff* para a segunda função objetivo

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7
ΔX_1	16.157.881	16.246.350	16.069.413	15.909.786	16.580.723	16.696.965	15.444.051
ΔX_2	16.278.251	16.283.705	16.272.796	16.106.932	16.611.841	16.833.510	15.560.720
ΔX_3	16.276.578	16.247.597	16.305.559	16.125.048	16.561.086	16.847.890	15.572.289
ΔX_4	16.408.499	16.344.026	16.472.971	16.308.596	16.673.651	16.972.160	15.679.589
ΔX_5	16.342.517	16.267.425	16.417.609	16.233.417	16.577.234	16.922.981	15.636.436
ΔX_6	16.388.531	16.255.653	16.521.410	16.324.048	16.552.291	16.987.094	15.690.692
ΔX_7	16.312.606	16.154.082	16.471.130	16.245.407	16.422.359	16.936.645	15.646.012

Os resultados apresentados nas Tabelas 9 e 10 produzem as estimativas características apresentadas nas Tabelas 11 e 12 e, correspondentemente, as matrizes com as estimativas dos critérios de escolha apresentadas nas Tabelas 13 e 14.

Tabela 11. Matriz com estimativas características para a primeira função objetivo

	$F_{s1}^{\max}(\Delta X_k)$	$F_{s1}^{\min}(\Delta X_k)$	$\bar{F}_{s1}(\Delta X_k)$	$R_{s1}^{\max}(\Delta X_k)$
ΔX_1	169.236,001	159.574,071	164.412,615	14.611,053
ΔX_2	165.006,139	152.757,575	158.881,857	7.622,721
ΔX_3	166.264,705	153.145,266	159.704,985	7.943,707
ΔX_4	159.758,276	145.201,558	152.479,917	0,000
ΔX_5	163.968,993	149.408,090	156.688,541	4.541,396
ΔX_6	163.230,304	147.010,822	155.120,563	3.472,028
ΔX_7	168.528,209	151.961,738	160.244,974	9.062,967

Tabela 12. Matriz com estimativas características para a segunda função objetivo

	$F_{s2}^{\max}(\Delta X_k)$	$F_{s2}^{\min}(\Delta X_k)$	$\bar{F}_{s2}(\Delta X_k)$	$R_{s2}^{\max}(\Delta X_k)$
ΔX_1	16.696.965,527	15.444.051,124	16.157.881,782	158.364,257
ΔX_2	16.833.510,544	15.560.720,542	16.278.251,230	203.383,534
ΔX_3	16.847.890,712	15.572.289,590	16.276.578,634	236.146,550
ΔX_4	16.972.160,102	15.679.589,592	16.408.499,269	403.558,914
ΔX_5	16.922.981,146	15.636.436,983	16.342.517,421	348.196,132
ΔX_6	16.987.094,822	15.690.692,671	16.388.531,829	451.997,377
ΔX_7	16.936.645,044	15.646.012,762	16.312.606,252	401.717,086

Tabela 13. Matriz com as estimativas dos critérios de escolha para a primeira função objetivo

	$F_{s1}^W(\Delta X_k)$	$F_{s1}^L(\Delta X_k)$	$\bar{F}_{s1}^S(\Delta X_k)$	$F_{s1}^H(\Delta X_k)$
ΔX_1	169.236,001	164.412,615	14.611,053	161.989,553
ΔX_2	165.006,139	158.881,857	7.622,721	155.819,716
ΔX_3	166.264,705	159.704,985	7.943,707	156.425,125
ΔX_4	159.758,276	152.479,917	0,000	148.840,738
ΔX_5	163.968,993	156.688,541	4.541,396	153.048,316
ΔX_6	163.230,304	155.120,563	3.472,028	151.065,692
ΔX_7	168.528,209	160.244,974	9.062,967	156.103,356
min	159.758,276	152.479,917	0,000	148.840,738
máx.	169.236,001	164.412,615	14.611,053	161.989,553

Aplicando (15) a estas estimativas, construímos as matrizes modificadas correspondentes apresentadas nas Tabelas 15 e 16. As matrizes modificadas com as estimativas dos critérios de escolha resultam na construção da matriz com os níveis agregados dos critérios de escolha difusos dados na Tabela 17.

Os resultados apresentados na Tabela 17 demonstram de forma convincente que a solução do problema é $\Delta X_2 = \{\Delta x_1^0 = 1.971,689, \Delta x_2^0 = 360,733, \Delta x_3^0 = 1.976,000, \Delta x_4^0 = 2.618,578\}$. Contudo, se os níveis agregados dos critérios de escolha difusos indicarem soluções diferentes (a informação quantitativa não conduz a uma solução única), é possível aplicar os critérios de caráter qualitativo na fase de decisão final. Os exemplos correspondentes são dados em (Ekel *et al.*, 2011; Ekel; Martini; Palhares, 2008).

Tabela 14. Matriz com as estimativas dos critérios de escolha para a segunda função objetivo

	$F_{s1}^W(\Delta X_k)$	$F_{s1}^L(\Delta X_k)$	$\bar{F}_{s1}^S(\Delta X_k)$	$F_{s1}^H(\Delta X_k)$
ΔX_1	16.696.965,527	16.157.881,782	158.364,257	15.757.279,725
ΔX_2	16.833.510,544	16.278.251,230	203.383,534	15.878.918,042
ΔX_3	16.847.890,712	16.276.578,634	236.146,550	15.891.189,870
ΔX_4	16.972.160,102	16.408.499,269	403.558,914	16.002.732,219
ΔX_5	16.922.981,146	16.342.517,421	348.196,132	15.958.073,024
ΔX_6	16.987.094,822	16.388.531,829	451.997,377	16.014.793,209
ΔX_7	16.936.645,044	16.312.606,252	401.717,086	15.968.670,833
min	16.696.965,527	16.157.881,782	158.364,257	15.757.279,725
máx.	16.987.094,822	16.408.499,269	451.997,377	16.014.793,209

Tabela 15. Matriz modificada com as estimativas dos critérios de escolha para a primeira função objetivo

	$\mu_{s1}^W(\Delta X_k)$	$\mu_{s1}^L(\Delta X_k)$	$\mu_{s1}^S(\Delta X_k)$	$\mu_{s1}^H(\Delta X_k)$
ΔX_1	0,000	0,000	0,000	0,000
ΔX_2	0,446	0,463	0,478	0,469
ΔX_3	0,314	0,395	0,456	0,423
ΔX_4	1,000	1,000	1,000	1,000
ΔX_5	0,556	0,647	0,689	0,680
ΔX_6	0,634	0,779	0,762	0,831
ΔX_7	0,075	0,349	0,380	0,448

Tabela 16. Matriz modificada com as estimativas dos critérios de escolha para a segunda função objetivo.

	$\mu_{s2}^W(\Delta X_k)$	$\mu_{s2}^L(\Delta X_k)$	$\mu_{s2}^S(\Delta X_k)$	$\mu_{s2}^H(\Delta X_k)$
ΔX_1	1,000	1,000	1,000	1,000
ΔX_2	0,529	0,520	0,847	0,528
ΔX_3	0,480	0,526	0,735	0,480
ΔX_4	0,051	0,000	0,165	0,047
ΔX_5	0,221	0,263	0,354	0,220
ΔX_6	0,000	0,080	0,000	0,000
ΔX_7	0,174	0,383	0,171	0,179

Tabela 17. Matriz com os níveis agregados dos critérios de escolha difusos

	$\mu_D^W(\Delta X_k)$	$\mu_D^L(\Delta X_k)$	$\mu_D^S(\Delta X_k)$	$\mu_D^H(\Delta X_k)$
ΔX_1	0,000	0,000	0,000	0,000
ΔX_2	0,446	0,463	0,478	0,469
ΔX_3	0,314	0,395	0,456	0,423
ΔX_4	0,051	0,000	0,165	0,047
ΔX_5	0,221	0,263	0,354	0,220
ΔX_6	0,000	0,080	0,000	0,000
ΔX_7	0,075	0,349	0,171	0,179
máx.	0,446	0,463	0,478	0,469

6. Solução de problemas na presença de informações qualitativas

Como foi indicado na Seção 1, existem diversas classes de problemas cuja essência requer a consideração dos objetivos formados com base em informação qualitativa em todas as fases da decisão. Sendo assim, a presente seção dedica-se à construção de funções objetivo com base em informações qualitativas, preservando a formulação homogênea dos objetivos correspondentes, discutida acima. Além disso, a

presente seção traz alguns novos resultados relacionados à conversão de diversos formatos de preferência com base nas funções de transformação correspondentes (as abordagens existentes para a construção de funções de transformação são discutidas em Chiclana, Herrera e Herrera-Viedma (1998, 2001), Delgado *et al.* (1998), Herrera, Herrera-Viedma e Chiclana (2001), Herrera-Viedma *et al.* (2004); Herrera, Martinez e Sanchez (2005), Zhang, Wang e Yang (2007).

A abordagem discutida na presente seção está associada às seguintes etapas:

1. Elicitação das preferências;
2. Representação das preferências como de relações de preferência multiplicativas;
3. Definição de vetores de preferência através da aplicação do Processo Hierárquico Analítico (AHP) (Saaty, 1980);
4. Agregação de preferências e geração de combinações representativas de dados iniciais, estados da natureza ou cenários.

Essa abordagem é baseada na aplicação e combinação dos resultados de (Ekel, *et al.*, 2016, Yager 1978, Kokshenev, 2015). Em particular, o autor de (Yager, 1978) utiliza em conjunto a abordagem Bellman-Zadeh para tomada de decisão em um ambiente difuso (Bellman; Zadeh, 1970; Pedrycz; Gomide, 1998) e o AHP (Saaty, 1980) para analisar problemas multiatributos que incluem objetivos com níveis de importância desiguais. Saaty, Vargas e Dellman (2003) propõem a construção de um modelo de programação linear onde são estimados coeficientes de uma função objetivo ou coeficientes de restrições a partir do AHP. Alguns exemplos de aplicação dos resultados de Saaty, Vargas e Dellman (2003) para resolver problemas de alocação de recursos intangíveis por meio de programação linear binária são dados em Saaty, Peniwati e Shang (2007). Por fim, os resultados de Ekel *et al.* (2016) e Kokshenev *et al.* (2015) dirigem-se à utilização da média ponderada ordenada (OWA) (Yager, 1988) para regular o nível de compensação intercritério ou o grau de otimismo ou apetite ao risco inerente à atitude de decisão (Damodaran, 2008; Kokshenev *et al.*, 2015; Palomares *et al.*, 2012) na tomada de decisão multiatributo.

6.1. Elicitação de preferências

As funções objetivo formadas com base em informações qualitativas devem incluir elementos que reflitam as preferências de um ou mais especialistas envolvidos, expressas pelas estruturas ou formatos de preferência correspondentes. Em particular, Zhang, Wang e Yang (2007) indicam oito formatos que podem ser utilizados para estabelecer preferências. Dentre esses oito formatos, neste trabalho consideramos a aplicação dos seguintes:

- ordem das alternativas (OA);
- relação de preferência difusa recíproca aditiva (RR);
- relação de preferência difusa não recíproca (NR);

- estimativa difusa (FE);
- relação de preferência multiplicativa (MR).

Deve-se notar que as relações de preferência difusas não recíprocas e as estimativas difusas, em certa medida, são equivalentes. Em particular, se duas alternativas $x_k \in X$ e $x_l \in X$ têm estimativas difusas com as funções de pertinência $\mu(x_k)$ e $\mu(x_l)$, então $NR(x_k, x_l)$ representa o grau de preferência $\mu(x_k)^* \mu(x_l)$, enquanto $NR(x_l, x_k)$ representa o grau de preferência $\mu(x_l)^* \mu(x_k)$. Utilizando o conceito de relação de preferência generalizada, introduzido em (Orlovski, 1981), $NR(x_k, x_l)$ e $NR(x_l, x_k)$ podem ser avaliadas da seguinte forma (Ekel; Pedrycz; Schinzinger, 1998; Ekel; Schuffner Neto, 2006):

$$NR(x_k, x_l) = \sup_{x_k, x_l \in X} \min\{\mu(x_k), \mu(x_l), \mu_R(x_k, x_l)\} \quad (58)$$

$$NR(x_l, x_k) = \sup_{x_k, x_l \in X} \min\{\mu(x_k), \mu(x_l), \mu_R(x_l, x_k)\} \quad (59)$$

onde $\mu_R(x_k, x_l)$ e $\mu_R(x_l, x_k)$ são as funções de pertinência das relações de preferência difusas correspondentes que, respectivamente, refletem a essência das preferências de x_k sobre x_l e de x_l sobre x_k (por exemplo, “mais atraente”, “mais flexível” etc.).

Quando o indicador que avalia as alternativas x_k e x_l pode ser medido em uma escala numérica e se a relação de preferência R é coerente com a ordem natural ($\leq$) ao longo do eixo sobre o qual este indicador é medido, então (58) e (59) são reduzidos a:

$$NR(x_k, x_l) = \sup_{x_k \leq x_l, x_k, x_l \in X} \min\{\mu(x_k), \mu(x_l)\} \quad (60)$$

$$NR(x_l, x_k) = \sup_{x_l \leq x_k, x_k, x_l \in X} \min\{\mu(x_k), \mu(x_l)\} \quad (61)$$

Se o indicador tiver caráter de maximização, as dependências (60) e (61) devem ser escritas para $x_k \geq x_l$ e $x_l \geq x_k$, respectivamente.

Assim, a disponibilidade de estimativas difusas para todos $x_k \in X$ suporta uma construção automática de $NR(x_k, x_l)$.

Para continuar a consideração das etapas indicadas acima, suponhamos que um grupo de especialistas $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ irá expressar suas preferências em relação a um conjunto de alternativas $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ sob a ótica do indicador C (por exemplo, “Nível de Inovação”).

O especialista e_1 pode expressar suas preferências pela ordem das alternativas:

$$OA_{e_1}(x_k) = \{x_1, x_4, x_2, x_3\} \quad (62)$$

O especialista e_2 pode expressar suas preferências utilizando a relação de preferência multiplicativa (cuja construção é baseada em (Stewart, 2005)):

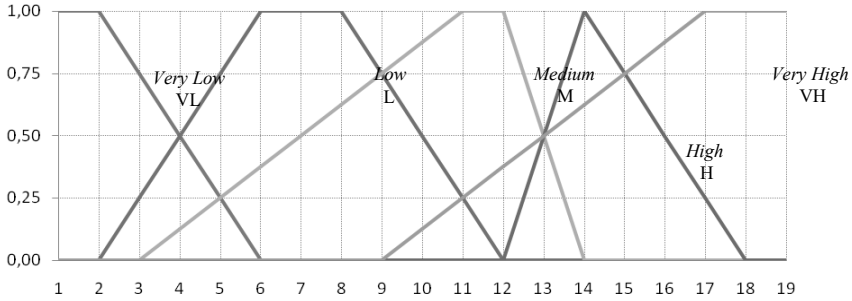
$$MR_{e_2}(x_k, x) = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 & 3 \\ 1/7 & 1 & 1/5 & 1/3 \\ 1/5 & 5 & 1 & 3 \\ 1/3 & 3 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \quad (63)$$

O especialista e_3 poderá apresentar suas preferências aplicando as estimativas difusas mostradas na Figura 1, indicando o seguinte: x_1 – VH; x_2 – VL; x_3 – H; x_4 – M. A utilização de (60) e (61) para essas estimativas permite construir a relação de preferência difusa não recíproca:

$$NR_{e_3}(x_k, x_l) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0,25 \\ 0,75 & 1 & 1 & 1 \\ 0,5 & 1 & 0,5 & 1 \end{bmatrix} \quad (64)$$

O especialista e_4 também poderá apresentar suas preferências aplicando as estimativas difusas da Figura 1.

Figura 1. Escalas qualitativas baseadas em conjuntos difusos utilizadas para objetivos baseados em informações qualitativas



Essa representação reflete o seguinte: x_1 – H; x_2 –M; x_3 –M; x_4 – L. Isso permite, usando (60) e (61), a construção da:

$$NR_{e_4}(x_k, x_l) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0,5 & 1 & 1 & 1 \\ 0,5 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0,75 & 0,75 & 1 \end{bmatrix} \quad (65)$$

6.2. Representação de preferências como de relações de preferência multiplicativas

Conforme mostrado em Saaty, Vargas e Dellman (2003), os componentes do vetor de preferências gerado pela aplicação do AHP podem ser utilizados como coeficientes para formação das funções objetivo correspondentes. A aplicação do AHP baseia-se no processamento das relações de preferência multiplicativas. Assim, é necessário ter disponíveis funções de transformação que permitam converter os formatos considerados no presente trabalho (ordem das alternativas, relações de preferência difusas recíprocas aditivas e relações de preferência difusas não recíprocas) para relações de preferência multiplicativas.

Considerando isso, é necessário indicar que nem sempre há a transformação direta de qualquer formato de preferência para a relação de preferência multiplicativa. Por exemplo, entre os formatos de preferência discutidos no presente artigo, não há conversão direta das relações de preferência difusa não recíprocas para a relação de preferência difusa multiplicativa. Requer a conversão preliminar das relações de preferência difusa não recíprocas em relações de preferência difusa recíprocas aditivas.

Consideremos a transformação da ordenação das alternativas para a relação de preferência multiplicativas ($OA \rightarrow MR$).

Chiclana, Herrera e Herrera-Viedma (1998) propuseram a seguinte função de transformação para obter as relações de preferência difusas recíprocas aditivas a partir da ordem das alternativas ($OA \rightarrow RR$):

$$RR(x_k, x_l) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{OA(x_l) - OA(x_k)}{n-1} \right), \quad k, l = 1, 2, \dots, n \quad (66)$$

Ao mesmo tempo, a função de transformação para obter as relações de preferência difusas recíprocas aditivas a partir da relação de preferência multiplicativa s ($MR \rightarrow RR$) apresentada em Chiclana, Herrera e Herrera-Viedma (2001) e Herrera-Viedma *et al.* (2004) é a seguinte:

$$RR(x_k, x_l) = \frac{1}{2} \left(1 + \log_m MR(x_k, x_l) \right), \quad k, l = 1, 2, \dots, n \quad (67)$$

onde m é um limite superior de uma escala usada no AHP.

Substituindo-se (66) em (67) e realizando as transformações correspondentes, é possível obter

$$MR(x_k, x_l) = m^{\frac{OA(x_l) - OA(x_k)}{n-1}}, \quad k, l = 1, 2, \dots, n \quad (68)$$

Aceitando-se a escala apresentada em (Saaty, 1980) com $m = 9$, é possível transformar (68) da seguinte forma:

$$MR(x_k, x_l) = 9^{\frac{OA(x_l) - OA(x_k)}{n-1}}, \quad k, l = 1, 2, \dots, n \quad (69)$$

Aplicando-se (69) à (62), podemos obter

$$MR_{e_1}(x_k, x) = \begin{bmatrix} 1,000 & 4,327 & 9,000 & 2,080 \\ 0,231 & 1,000 & 2,080 & 0,481 \\ 0,111 & 0,481 & 1,000 & 0,231 \\ 0,481 & 2,080 & 4,327 & 1,000 \end{bmatrix} \quad (70)$$

A função de transformação para obter as relações de preferência difusas recíprocas aditivas a partir das relações de preferência difusas não recíprocas ($NR \rightarrow RR$) apresentadas em Herrera-Viedma *et al.* (2007) é a seguinte:

$$RR(x_k, x_l) = \frac{1}{2} \left(1 + RN(x_k, x_l) - RN(x_l, x_k) \right), \quad k, l = 1, 2, \dots, n \quad (71)$$

Aplicando-se (71) a (64) e (65), é possível obter:

$$RR_{e_3}(x_k, x) = \begin{bmatrix} 0,500 & 1,000 & 0,625 & 0,750 \\ 0 & 0,500 & 0 & 0,125 \\ 0,375 & 1,000 & 0,500 & 0,750 \\ 0,250 & 0,875 & 0,250 & 0,500 \end{bmatrix} \quad (72)$$

e

$$RR_{e_4}(x_k, x) = \begin{bmatrix} 0,500 & 0,750 & 0,750 & 1,000 \\ 0,250 & 0,500 & 0,500 & 0,625 \\ 0,250 & 0,750 & 0,500 & 0,625 \\ 0 & 0,375 & 0,375 & 0,500 \end{bmatrix} \quad (73)$$

respectivamente.

A função de transformação para construir as relações de preferência multiplicativas com base nas relações de preferência difusas recíprocas aditivas ($RR \rightarrow MR$) pode ser obtida em (67) e tem a seguinte forma:

$$MR(x_k, x_l) = 9^{(2RR(x_k, x_l) - 1)}, \quad k, l = 1, 2, \dots, n \quad (74)$$

Deve-se mencionar a possibilidade de aplicar os resultados de Zhang, Chena e Chong (2004) para realizar também a transformação $RR \rightarrow MR$.

O uso de (74) transformadas (72) e (73) para:

$$MR_{e_3}(x_k, x) = \begin{bmatrix} 1,000 & 9,000 & 1,732 & 3,000 \\ 0,111 & 1,000 & 0,111 & 0,192 \\ 0,577 & 9,000 & 1,000 & 3,000 \\ 0,333 & 5,196 & 0,333 & 1,000 \end{bmatrix} \quad (75)$$

e

$$MR_{e_4}(x_k, x) = \begin{bmatrix} 1,000 & 3,000 & 3,000 & 9,000 \\ 0,333 & 1,000 & 1,000 & 1,732 \\ 0,333 & 3,000 & 1,000 & 1,732 \\ 0,111 & 0,577 & 0,577 & 1,000 \end{bmatrix} \quad (76)$$

respectivamente.

6.3. Definição de vetores de preferência com base na aplicação do AHP

Todas as relações de preferência multiplicativas (70), (63), (75) e (76) têm altos níveis de consistência: para essas relações de preferência multiplicativas, os máximos autovalores $\lambda_{\max}$ (Saaty, 1980) estão próximos da dimensionalidade da matriz $n = 4$. Levando isso em consideração, os autovetores correspondentes a (70), (63), (75) e (76) são dados como:

$$E_{e_1} = [0,549 \quad 0,127 \quad 0,061 \quad 0,264] \quad (77)$$

$$E_{e_2} = [0,584 \quad 0,053 \quad 0,233 \quad 0,130] \quad (78)$$

$$E_{e_3} = [0,459 \quad 0,039 \quad 0,349 \quad 0,153] \quad (79)$$

e

$$E_{e_4} = [0,581 \quad 0,167 \quad 0,167 \quad 0,085] \quad (80)$$

podem servir como vetores de preferência.

Os vetores (77)-(80) devem ser agregados e utilizados como combinações representativas de dados iniciais, estados da natureza ou cenários.

6.4. Agregação de preferências e geração de combinações representativas de dados iniciais, estados da natureza ou cenários

A ideia central desta etapa é utilizar o nível de “orness”, oferecido pelo operador OWA como resultado da alteração do conjunto de pesos correspondentes $w_i, i = 1, 2, \dots, n$ (Yager, 1988) e a geração de combinações representativas de dados iniciais, estados da natureza ou cenários, através da aplicação das sequências LP_τ (Sobol’, 1979; Sobol’; Statnikov, 2006) cuja aplicação foi discutida acima. Essa geração deverá fornecer combinações representativas de dados iniciais, estados da natureza ou cenários equilibrados do ponto de vista de uma mistura justificada de situações pessimistas e otimistas.

Para implementar essa ideia, torna-se necessário agregar as opiniões dos especialistas extraíndo os limites do pessimismo/otimismo aceitos pelo decisor. Por exemplo, aplicando o OWA (E_{e_i}, W) , $i = 1, 2, 3, 4$, para os vetores $W^p = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$ (pessimista) e $W^o = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$ (otimista), respectivamente, é possível obter:

$$OWA(E_{e_i}, W^p) = [0,459 \quad 0,039 \quad 0,061 \quad 0,085] \quad (81)$$

e

$$OWA(E_{e_i}, W^o) = [0,584 \quad 0,167 \quad 0,349 \quad 0,264] \quad (82)$$

A aplicação das sequências LP_τ , levando em consideração os limites inferior (81) e superior (82) para a geração, por exemplo, de $S = 3$ combinações representativas de dados iniciais, estados de natureza ou cenários permite analisar a p -ésima função objetivo com diferentes coeficientes:

$$F_p(X) = 0,521x_1 + 0,103x_2 + 0,205x_3 + 0,174x_4 \quad (83)$$

$$F_p(X) = 0,490x_1 + 0,135x_2 + 0,133x_3 + 0,219x_4 \quad (84)$$

e

$$F_p(X) = 0,553x_1 + 0,071x_2 + 0,277x_3 + 0,129x_4 \quad (85)$$

7. Exemplo de aplicação

Como exemplo ilustrativo, resolvamos o problema modificado da alocação multiobjetivo e da escassez de recursos financeiros no planejamento estratégico considerado acima. O problema modificado deverá ser resolvido para os quartos projetos no âmbito do mesmo *Modelo 3*.

As restrições do problema modificado são (39)-(43).

Os objetivos são os seguintes:

1. Maior restrição financeira para projetos que gerem menor oferta de produtos no exterior.
2. Maior restrição financeira para projetos que gerem menor nível de lucro para cada U\$1.000.000,00 investidos.
3. Maior restrição financeira para projetos que gerem um menor nível de inovação.

Os dois primeiros objetivos são iguais aos do exemplo acima. A construção da função objetivo, que corresponde ao terceiro objetivo, baseia-se na utilização de informação qualitativa. Essa informação é fornecida por um grupo de especialistas $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, responsável por gerar as estimativas necessárias relacionadas a um conjunto de projetos $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ na perspectiva do indicador “Nível de Inovação”.

Em particular, o especialista e_1 apresentou suas preferências aplicando as estimativas difusas da Figura 1, indicando o seguinte: x_1 – VH; x_2 – EU; x_3 – H; x_4 – M. O especialista e_2 também utilizou as estimativas difusas da Figura 1: x_1 – H; x_2 –M; x_3 –H; x_4 – L. Finalmente, o perito e_3 ordenou as alternativas da seguinte forma:

$$OA_{e_3}(x_k) = \{x_1, x_3, x_2, x_4\} \quad (86)$$

O primeiro passo na solução do problema é o processamento da informação qualitativa para a construção de estimativas para a terceira função objetivo.

A partir das estimativas difusas fornecidas pelos especialistas e_1 e e_2 , com base na Figura 1 e aplicando (60) e (61), pode-se derivar as seguintes relações de preferência difusa não recíprocas:

$$NR_{e_1}(x_k, x_l) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0,25 & 1 & 0 & 0,75 \\ 0,75 & 1 & 1 & 1 \\ 0,50 & 1 & 0,50 & 1 \end{bmatrix} \quad (87)$$

e

$$NR_{e_2}(x_k, x_l) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0,50 & 1 & 0,50 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0,75 & 0 & 1 \end{bmatrix} b \quad (88)$$

Então, aplicando (71), elas são convertidas nas relações de preferência difusas recíprocas:

$$RR_{e_1}(x_k, x_l) = \begin{bmatrix} 0,500 & 0,875 & 0,625 & 0,750 \\ 0,125 & 0,500 & 0 & 0,375 \\ 0,375 & 1 & 0,500 & 0,750 \\ 0,250 & 0,625 & 0,250 & 0,500 \end{bmatrix} \quad (89)$$

e

$$RR_{e_2}(x_k, x_l) = \begin{bmatrix} 0,500 & 0,750 & 0,500 & 1 \\ 0,250 & 0,500 & 0,250 & 0,625 \\ 0,500 & 0,750 & 0,500 & 1 \\ 0 & 0,375 & 0 & 0,500 \end{bmatrix} \quad (90)$$

respectivamente.

Aplicando (74) a (89) e (90), construímos as relações de preferência multiplicativas:

$$MR_{e_1}(x_k, x_l) = \begin{bmatrix} 1,000 & 5,196 & 1,732 & 3,000 \\ 0,193 & 1,000 & 0,111 & 0,577 \\ 0,577 & 9,000 & 1,000 & 3,000 \\ 0,333 & 1,732 & 0,333 & 1,000 \end{bmatrix} \quad (91)$$

e

$$MR_{e_2}(x_k, x_l) = \begin{bmatrix} 1,000 & 3,000 & 1,000 & 9,000 \\ 0,333 & 1,000 & 0,333 & 1,732 \\ 1,000 & 3,000 & 1,000 & 9,000 \\ 0,111 & 0,577 & 0,111 & 1,000 \end{bmatrix} \quad (92)$$

respectivamente.

Como o especialista e_3 expressou suas preferências por (86), aplicando (69) para processar (86), construímos a seguinte relação de preferência multiplicativa:

$$MR_{e_3}(x_k, x_l) = \begin{bmatrix} 1,000 & 4,327 & 2,080 & 9,000 \\ 0,231 & 1,000 & 0,481 & 2,080 \\ 0,481 & 2,080 & 1,000 & 4,327 \\ 0,111 & 0,481 & 0,231 & 1,000 \end{bmatrix} \quad (93)$$

Todas as relações de preferência multiplicativas (91)-(93) possuem altos níveis de consistência: para todas elas os máximos autovalores $\lambda_{\max}$ (Saaty, 1980) estão próximos da dimensionalidade das relações ($n = 4$). Considerando isso, os autovetores correspondentes a (91)-(93):

$$E_{e_1} = [0,434 \quad 0,063 \quad 0,380 \quad 0,122] \quad (94)$$

$$E_{e_2} = [0,413 \quad 0,121 \quad 0,413 \quad 0,053] \quad (95)$$

e

$$E_{e_3} = [0,549 \quad 0,127 \quad 0,264 \quad 0,061] \quad (96)$$

podem servir como vetores de preferência.

O uso de (94)-(96) permite a construção de:

$$OWA(E_{e_i}, W^p) = [0,413 \quad 0,063 \quad 0,264 \quad 0,053] \quad (97)$$

e

$$OWA(E_{e_i}, W^o) = [0,549 \quad 0,127 \quad 0,413 \quad 0,122] \quad (98)$$

A aplicação das sequências LP_τ , considerando os limites inferior (97) e superior (98) para o objetivo, com base na utilização de informações qualitativas, e os outros dois

objetivos, com base na aplicação de informações quantitativas, para gerar, por exemplo, $S = 7$ combinações representativas de dados iniciais, estados de natureza ou cenários dão origem aos seguintes sete problemas multiobjetivos:

$$F_1(\Delta X) = 26,000\Delta x_1 + 46,000\Delta x_2 + 29,500\Delta x_3 + 12,500\Delta x_4 \rightarrow \min \quad (99)$$

$$F_2(\Delta X) = 2.530,000\Delta x_1 + 2.100,000\Delta x_2 + 1.825,000\Delta x_3 + 2.645,000\Delta x_4 \rightarrow \min \quad (100)$$

$$F_3(\Delta X) = 0,481\Delta x_1 + 0,095\Delta x_2 + 0,338\Delta x_3 + 0,088\Delta x_4 \rightarrow \min \quad (101)$$

$$F_1(\Delta X) = 26,250\Delta x_1 + 47,750\Delta x_2 + 27,500\Delta x_3 + 13,500\Delta x_4 \rightarrow \min \quad (102)$$

$$F_2(\Delta X) = 2.370,000\Delta x_1 + 2.225,000\Delta x_2 + 1.762,500\Delta x_3 + 2.797,500\Delta x_4 \rightarrow \min \quad (103)$$

$$F_3(\Delta X) = 0,515\Delta x_1 + 0,079\Delta x_2 + 0,376\Delta x_3 + 0,071\Delta x_4 \rightarrow \min \quad (104)$$

$$F_1(\Delta X) = 28,750\Delta x_1 + 44,250\Delta x_2 + 31,500\Delta x_3 + 11,500\Delta x_4 \rightarrow \min \quad (105)$$

$$F_2(\Delta X) = 2.690,000\Delta x_1 + 1.975,000\Delta x_2 + 1.887,500\Delta x_3 + 2.492,500\Delta x_4 \rightarrow \min \quad (106)$$

$$F_3(\Delta X) = 0,449\Delta x_1 + 0,111\Delta x_2 + 0,301\Delta x_3 + 0,105\Delta x_4 \rightarrow \min \quad (107)$$

$$F_1(\Delta X) = 21,875\Delta x_1 + 46,875\Delta x_2 + 32,500\Delta x_3 + 14,000\Delta x_4 \rightarrow \min \quad (108)$$

$$F_2(\Delta X) = 2.610,000\Delta x_1 + 1.912,500\Delta x_2 + 1.793,750\Delta x_3 + 2.568,750\Delta x_4 \rightarrow \min \quad (109)$$

$$F_3(\Delta X) = 0,532\Delta x_1 + 0,103\Delta x_2 + 0,357\Delta x_3 + 0,114\Delta x_4 \rightarrow \min \quad (110)$$

$$F_1(\Delta X) = 27,375\Delta x_1 + 43,375\Delta x_2 + 28,500\Delta x_3 + 12,000\Delta x_4 \rightarrow \min \quad (111)$$

$$F_2(\Delta X) = 2.290,000\Delta x_1 + 2.162,500\Delta x_2 + 1.918,750\Delta x_3 + 2.873,750\Delta x_4 \rightarrow \min \quad (112)$$

$$F_3(\Delta X) = 0,464\Delta x_1 + 0,071\Delta x_2 + 0,282\Delta x_3 + 0,079\Delta x_4 \rightarrow \min \quad (113)$$

$$F_1(\Delta X) = 24,625\Delta x_1 + 45,125\Delta x_2 + 30,500\Delta x_3 + 11,000\Delta x_4 \rightarrow \min \quad (114)$$

$$F_2(\Delta X) = 2.770,000\Delta x_1 + 2.287,500\Delta x_2 + 1.731,250\Delta x_3 + 2.721,250\Delta x_4 \rightarrow \min \quad (115)$$

$$F_3(\Delta X) = 0,430\Delta x_1 + 0,119\Delta x_2 + 0,320\Delta x_3 + 0,096\Delta x_4 \rightarrow \min \quad (116)$$

$$F_1(\Delta X) = 30,125\Delta x_1 + 48,625\Delta x_2 + 26,500\Delta x_3 + 13,000\Delta x_4 \rightarrow \min \quad (117)$$

$$F_2(\Delta X) = 2.450,000\Delta x_1 + 2.037,500\Delta x_2 + 1.856,250\Delta x_3 + 2.416,250\Delta x_4 \rightarrow \min \quad (118)$$

$$F_3(\Delta X) = 0,498\Delta x_1 + 0,087\Delta x_2 + 0,394\Delta x_3 + 0,069\Delta x_4 \rightarrow \min \quad (119)$$

que estão sujeitos às restrições (39)-(43).

Utilizando os resultados apresentados na Seção 3 para analisar estes problemas, obtém-se a Tabela 18.

Substituindo essas soluções em (99), (102), (105), (108), (111), (114) e (117), formamos a matriz *payoff* para a primeira função objetivo (Tabela 19). Substituindo essas soluções em (100), (103), (106), (109), (112), (115) e (118), a matriz *payoff* para a segunda função objetivo é construída (Tabela 20). Finalmente, substituindo as mesmas soluções em (101), (104), (107), (110), (113), (116) e (119), construímos a matriz *payoff* para a terceira função objetivo (Tabela 21).

Tabela 18. Alternativas de solução para cenários $S=7$

$\acute{e}$	Δx_1	Δx_2	Δx_3	Δx_4
1	1.183,094	1.398,000	1.435,907	2.910,000
2	1.193,588	858,836	1.976,000	2.898,576
3	1.294,361	947,726	1.830,678	2.854,235
4	1.390,000	1.329,140	1.297,861	2.909,999
5	1.560,759	888,641	1.589,214	2.888,388
6	1.569,496	797,186	1.716,699	2.843,620
7	2.272,738	304,826	1.439,435	2.910,000

Tabela 19. Matriz *payoff* para a primeira função objetivo

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7
ΔX_1	173.802	173.033	174.571	178.818	168.868	168.023	179.499
ΔX_2	165.063	162.231	167.896	171.167	161.025	160.299	167.763
ΔX_3	166.931	164.223	169.639	172.195	162.965	161.872	170.693
ΔX_4	171.942	170.760	173.124	175.630	167.611	165.800	178.726
ΔX_5	164.443	161.416	167.470	167.883	161.223	158.776	169.891
ΔX_6	163.665	160.154	167.176	167.304	160.592	158.260	168.503
ΔX_7	151.951	146.266	157.637	151.526	151.381	145.634	159.263

Tabela 20. Matriz de *payoff* para a segunda função objetivo

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7
ΔX_1	16.246.505	16.585.991	15.907.019	15.812.268	16.850.216	16.879.844	15.443.692
ΔX_2	16.096.266	16.331.180	15.861.353	15.747.955	16.711.782	16.579.526	15.345.803
ΔX_3	16.155.396	16.387.618	15.923.175	15.806.402	16.728.515	16.689.751	15.396.917
ΔX_4	16.373.437	16.679.839	16.067.036	15.972.978	16.910.246	17.056.464	15.554.062
ΔX_5	16.354.964	16.557.476	16.152.452	16.043.302	16.845.629	16.967.417	15.563.507
ΔX_6	16.299.263	16.474.150	16.124.376	16.004.878	16.783.827	16.881.300	15.527.048
ΔX_7	16.714.082	16.742.357	16.685.806	16.571.876	16.988.286	17.403.634	15.892.531

Tabela 21. Matriz de *payoff* para a terceira função objetivo

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7
ΔX_1	1.442	1.463	1.421	1.615	1.283	1.413	1.456
ΔX_2	1.578	1.628	1.527	1.757	1.401	1.525	1.627
ΔX_3	1.581	1.629	1.534	1.763	1.410	1.529	1.624
ΔX_4	1.488	1.512	1.464	1.669	1.335	1.450	1.499
ΔX_5	1.625	1.673	1.577	1.816	1.464	1.562	1.659
ΔX_6	1.660	1.715	1.604	1.852	1.494	1.592	1.703
ΔX_7	1.863	1.939	1.787	2.083	1.712	1.753	1.905

Os resultados apresentados nas Tabelas 19-21 produzem as matrizes com as estimativas características apresentadas nas Tabelas 22-24 e, correspondentemente, as matrizes com as estimativas dos critérios de escolha fornecidas nas Tabelas 25-27. Aplicando (15) a estas estimativas, construímos as matrizes modificadas correspondentes apresentadas nas Tabelas 28-30. As matrizes modificadas com as estimativas dos critérios de escolha resultam na construção da matriz com os níveis agregados dos critérios de escolha difusos apresentados na Tabela 31.

Tabela 22. Matriz com as estimativas características da primeira função objetivo

	$F_{s1}^{\max}(\Delta X_k)$	$F_{s1}^{\min}(\Delta X_k)$	$\bar{F}_{s1}(\Delta X_k)$	$R_{s1}^{\max}(\Delta X_k)$
ΔX_1	179.499,968	168.023,581	173.802,678	27.291,855
ΔX_2	171.167,732	160.299,409	165.063,938	19.641,200
ΔX_3	172.195,126	161.872,036	166.931,716	20.668,594
ΔX_4	178.726,482	165.800,936	171.942,322	24.494,008
ΔX_5	169.891,193	158.776,850	164.443,824	16.356,942
ΔX_6	168.503,791	158.260,970	163.665,295	15.777,656
ΔX_7	159.263,447	145.634,243	151.951,544	0,000

Tabela 23. Matriz com as estimativas características da segunda função objetivo

	$F_{s2}^{\max}(\Delta X_k)$	$F_{s2}^{\min}(\Delta X_k)$	$\bar{F}_{s2}(\Delta X_k)$	$R_{s2}^{\max}(\Delta X_k)$
ΔX_1	179.499,968	168.023,581	173.802,678	27.291,855
ΔX_2	171.167,732	160.299,409	165.063,938	19.641,200
ΔX_3	172.195,126	161.872,036	166.931,716	20.668,594
ΔX_4	178.726,482	165.800,936	171.942,322	24.494,008
ΔX_5	169.891.1929	158.776,850	164.443,824	16.356,942
ΔX_6	168.503,791	158.260,970	163.665,295	15.777,656
ΔX_7	159.263,447	145.634,244	151.951,544	0,000

Tabela 24. Matriz com as estimativas características da terceira função objetivo

	$F_{s3}^{\max}(\Delta X_k)$	$F_{s3}^{\min}(\Delta X_k)$	$\bar{F}_{s3}(\Delta X_k)$	$R_{s3}^{\max}(\Delta X_k)$
ΔX_1	1.615,899	1.283,586	1.442,487	0,000
ΔX_2	1.757,480	1.401,731	1.578,050	170,548
ΔX_3	1.763,294	1.410,247	1.581,885	168,402
ΔX_4	1.669,536	1.335,676	1.488,718	53,637
ΔX_5	1.816,528	1.464,123	1.625,653	210,182
ΔX_6	1.852,183	1.494,131	1.660,373	252,181
ΔX_7	2.083,953	1.712,262	1.863,730	475,750

Tabela 25. Matriz com as estimativas dos critérios de escolha para a primeira função objetivo

	$F_{s1}^W(\Delta X_k)$	$F_{s1}^L(\Delta X_k)$	$F_{s1}^S(\Delta X_k)$	$F_{s1}^H(\Delta X_k)$
ΔX_1	179.499,968	173.802,678	27.291,855	170.892,678
ΔX_2	171.167,732	165.063,938	19.641,200	163.016,490
ΔX_3	172.195,126	166.931,716	20.668,594	164.452,808
ΔX_4	178.726,482	171.942,322	24.494,008	169.032,322
ΔX_5	169.891,193	164.443,824	16.356,942	161.555,436
ΔX_6	168.503,791	163.665,295	15.777,656	160.821,675
ΔX_7	159.263,447	151.951,544	0,000	149.041,545
Min	159.263,447	151.951,544	0,000	149.041,545
máx.	179.499,968	173.802,678	27.291,855	170.892,678

Tabela 26. Matriz com as estimativas dos critérios de escolha para a segunda função objetivo

	$F_{s2}^W(X_k)$	$F_{s2}^L(X_k)$	$F_{s2}^S(X_k)$	$F_{s2}^H(X_k)$
ΔX_1	16.879.844.403	16.246.505.723	300.318.238	15.802.730.770
ΔX_2	16.711.782.230	16.096.266.876	0,000	15.687.298.039
ΔX_3	16.728.515.456	16.155.396.782	110.225.144	15.729.816.952
ΔX_4	17.056.464.750	16.373.437.971	476.938.585	15.929.663.074
ΔX_5	16.967.417.485	16.354.964.298	387.891.319	15.914.485.128
ΔX_6	16.881.300.508	16.299.263.714	301.774.342	15.865.611.728
ΔX_7	17.403.634.478	16.714.082.219	824.453.217	16.270.307.242
min	16.711.782,230	16.096.266,876	0,000	15.687.298,039
máx.	17.403.634,478	16.714.082,219	824.453,217	16.270.307,242

Tabela 27. Matriz com as estimativas dos critérios de escolha para a terceira função objetivo

	$F_{s3}^W(X_k)$	$F_{s3}^L(X_k)$	$F_{s3}^S(X_k)$	$F_{s3}^H(X_k)$
ΔX_1	1.615,898	1.442,487	0,000	1.366,664
ΔX_2	1.757,480	1.578,050	170,548	1.490,668
ΔX_3	1.763,294	1.581,885	168,402	1.498,509
ΔX_4	1.669,536	1.488,718	53,637	1.419,141
ΔX_5	1.816,528	1.625,653	210,189	1.552,224
ΔX_6	1.852,183	1.660,3726	252,181	1.583,645
ΔX_7	2.083,953	1.863,730	475,750	1.805,185
min	1.615,899	1.442,487	0,000	1.366,664
máx.	2.083,953	1.863,730	475,750	1.805,185

Tabela 28. Matriz modificada com as estimativas dos critérios de escolha para a primeira função objetivo

	$\mu_{s_1}^W(X_k)$	$\mu_{s_1}^L(X_k)$	$\mu_{s_1}^S(X_k)$	$\mu_{s_1}^H(X_k)$
ΔX_1	0,000	0,000	0,000	0,000
ΔX_2	0,412	0,400	0,280	0,360
ΔX_3	0,361	0,314	0,243	0,295
ΔX_4	0,038	0,085	0,103	0,085
ΔX_5	0,475	0,428	0,401	0,427
ΔX_6	0,543	0,464	0,422	0,469
ΔX_7	1,000	1,000	1,000	1,000

Tabela 29. Matriz modificada com as estimativas dos critérios de escolha para a segunda função objetivo

	$\mu_{s_2}^W(X_k)$	$\mu_{s_2}^L(X_k)$	$\mu_{s_2}^S(X_k)$	$\mu_{s_2}^H(X_k)$
ΔX_1	0,757	0,757	0,636	0,802
ΔX_2	1,000	1,000	1,000	1,000
ΔX_3	0,976	0,904	0,866	0,927
ΔX_4	0,502	0,551	0,421	0,584
ΔX_5	0,631	0,581	0,530	0,610
ΔX_6	0,755	0,671	0,634	0,694
ΔX_7	0,000	0,000	0,000	0,000

Tabela 30. Matriz modificada com as estimativas dos critérios de escolha para a terceira função objetivo

	$\mu_{s_3}^W(X_k)$	$\mu_{s_3}^L(X_k)$	$\mu_{s_3}^S(X_k)$	$\mu_{s_3}^H(X_k)$
ΔX_1	1,000	1,000	1,000	0,000
ΔX_2	0,698	0,678	0,642	0,717
ΔX_3	0,685	0,669	0,646	0,699
ΔX_4	0,885	0,890	0,887	0,880
ΔX_5	0,571	0,565	0,558	0,577
ΔX_6	0,495	0,483	0,470	0,505
ΔX_7	0,000	0,000	0,000	0,717

Tabela 31. Matriz com os níveis agregados dos critérios de escolha difusos

	$\mu_D^W(X_k)$	$\mu_D^L(X_k)$	$\mu_D^S(X_k)$	$\mu_D^H(X_k)$
ΔX_1	0,000	0,000	0,000	0,000
ΔX_2	0,412	0,400	0,280	0,360
ΔX_3	0,361	0,314	0,243	0,295
ΔX_4	0,038	0,085	0,103	0,085
ΔX_5	0,475	0,428	0,401	0,427
ΔX_6	0,495	0,464	0,422	0,461
ΔX_7	0,000	0,000	0,000	0,000

Assim, a solução do problema é $\Delta X_6 = \Delta x_2^0 = 797,186, \Delta x_3^0 = 1.716,699, \Delta x_4^0 = 2.843,620$ o que difere significativamente da solução obtida ao considerar apenas as funções objetivo formadas com base em informações quantitativas.

8. Conclusões

Neste capítulo, apresentamos os resultados relacionados à tomada de decisão multicritério sob condições de incerteza, considerando funções objetivo formadas com base em informações quantitativas e qualitativas. Esses resultados estão associados à extensão do esquema geral de tomada de decisão multicritério sob condições de incerteza aplicando a generalização baseada em conjuntos difusos da abordagem clássica para lidar com a incerteza da informação para produzir soluções robustas na análise de problemas multicritério.

Originalmente, o esquema geral foi direcionado ao uso da informação quantitativa disponível em grau máximo para reduzir as regiões de incerteza de decisão. Presumindo a aplicação de informações de caráter qualitativo apenas na fase final de tomada de decisão. Porém, nos últimos anos têm surgido com maior frequência problemas que exigem a consideração dos objetivos formados com a utilização de informações qualitativas, em todas as etapas, desde o início do processo de tomada de decisão. Considerando isso, no artigo foi proposta a abordagem que permite gerar soluções robustas multiobjetivo (no âmbito da abordagem possibilística) através da construção de combinações representativas de dados iniciais, estados da natureza ou cenários com o uso direto de informações qualitativas juntamente com informações quantitativas, garantindo uma fusão convincente de informações. Essa abordagem admite a possibilidade de os especialistas aplicarem diversos formatos de preferência no seu processamento com base em diferentes funções de transformação.

Os resultados do artigo são de caráter universal e foram aplicados na formulação e análise de problemas de alocação multicritério de recursos ou de escassez de recursos. Os resultados servem como respostas à questão fundamental “Como fazer?” decorrentes de diferentes tipos de atividades de planejamento. Um dos resultados importantes do artigo está associado à proposta homogênea, clara e aceitável, para qualquer especialista envolvido no processo de tomada de decisão, de formulação de objetivos específicos, que

serve para a construção de funções objetivo para modelos de alocação multiobjetivo de recursos ou suas carências.

Os resultados do artigo são ilustrados considerando exemplos de alocação de escassez de recursos no planejamento estratégico.

Referências

- BELLMAN, R. E.; ZADEH, L. A. Decision-making in a fuzzy environment. **Management Science**, v. 17, n. 4, p. 141-164, 1970.
- BELYAEV, L. S. **A practical approach to choosing alternative solutions to complex optimization problems under uncertainty**. Laxenburg: International Institute for Applied Systems Analysis, 1977.
- BURKOV, V.; KONDRAT'ev, V. **Mechanisms of functioning organizational systems**. Moscow: Nauka, 1981. (In Russian).
- CHICLANA, F.; HERRERA, F.; HERRERA-VIEDMA, E. Integrating multiplicative preference relations in a multipurpose decision-making model based on fuzzy preference relations. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 122, n. 2, p. 277-291, Sep. 2001.
- CHICLANA, F.; HERRERA, F.; HERRERA-VIEDMA, E. Integrating three representation models in fuzzy multipurpose decision making based on fuzzy preference relations. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 97, n. 1, p. 33-48, Jul. 1998.
- COELHO, C. A. C. Evolutionary multi-objective optimization: Critical review. *In*: SARKER, R.; MOHAMMADIAN, M.; YAO, X. (ed.). **Evolutionary optimization**. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2005. p. 117-146.
- DAMODARAN, A. **Strategic risk taking: a framework for risk management**. New Jersey: Pearson Prentice Hall, 2008.
- DELGADO, M. *et al.* Combining numerical and linguistic information in group decision making. **Information Sciences**, v. 107, n. 1/4, p. 177-194, Jun. 1998.
- DURBACH, I. N.; STEWART, T. J. Modeling uncertainty in multi-criteria decision analysis. **European Journal of Operational Research**, v. 223, n. 1, p. 1-14, Nov. 2012.
- EDGEWORTH, F. Y. **Mathematical physics**. London: P. Keegan, 1881.
- EHRGOTT, M. **Multicriteria optimization**. Berlin: Springer-Verlag, 2005.
- EKEL, P. I. *et al.* Multiobjective and multiattribute decision making in a fuzzy environment and their power engineering applications. **Information Sciences**, v. 361/362, p. 100-119, Sep. 2016.
- EKEL, P. Ya. *et al.* Multicriteria analysis based on constructing payoff matrices and applying methods of decision making in fuzzy environment. **Optimization and Engineering**, v. 12, p. 5-29, Mar. 2011.
- EKEL, P. Ya. Fuzzy sets and models of decision making. **Computers & Mathematics with Applications**, v. 44, n. 7, p. 863-875, Oct. 2002.

- EKEL, P. Ya.; GALPERIN, E. A. Box-triangular multiobjective linear programs for resource allocation with application to load management and energy market problems. **Mathematical and Computer Modelling**, v. 37, n. 1/2, p. 1-17, Jan. 2003.
- EKEL, P. Ya.; MARTINI, J. S. C.; PALHARES, R. M. Multicriteria analysis in decision making under information uncertainty. **Applied Mathematics and Computation**, v. 200, n. 2, p. 501-516, Jul. 2008.
- EKEL, P. Ya.; SCHUFFNER NETO, F. H. Algorithms of discrete optimization and their application to problems with fuzzy coefficients. *Information Sciences*, v. 176, n. 19, p. 2846-2868, 2006.
- HERRERA, F.; HERRERA-VIEDMA, E.; CHICLANA, F. Multiperson decision-making based on multiplicative preference relations. **European Journal of Operational Research**, v. 129, n. 2, p. 372-385, Mar. 2001.
- HERRERA, F.; MARTINEZ, L.; SANCHEZ, P. J. Managing non-homogeneous information in group decision making. **European Journal of Operational Research**, v. 166, n. 1, p. 115-132, Oct. 2005.
- HERRERA-VIEDMA, E. *et al.* A consensus model for group decision making with incomplete fuzzy preference relations. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, v. 15, n. 5, p. 863-877, Oct. 2007.
- HERRERA-VIEDMA, E. *et al.* Some issues on consistency of fuzzy preference relations. **European Journal of Operational Research**, v. 154, n. 1, p. 98-109, Apr. 2004.
- HWANG, C. L.; YOON, K. **Multiple attribute decision making: methods and applications: a state-of-the-art survey**. Berlin: Springer-Verlag, 1981.
- HWANG, C.L.; MASUD, A. S. **Multiple objective decision making: methods and applications**. Berlin: Springer-Verlag, 1979.
- KAPLAN, R. S.; NORTON, D. P. **Strategy maps: converting intangible assets into tangible outcomes**, Harvard Business Press, Boston, 2004.
- KAPLAN, R. S.; NORTON, D. P. **The balanced scorecard: translating strategy into action**, Boston: Harvard Business Press, 1996.
- KOKSHENEV, I. *et al.* A web-based decision support center for electrical energy companies. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, v. 23, n.1, p. 16-28, Feb. 2015.
- LUCE, R. D.; RAIFFA, H. **Games and decisions**. New York: John Wiley & Sons, 1957.
- ORLOVSKI, S. A. **Problems of decision making with fuzzy information**. Nauka: Moscow, 1981. (In Russian).
- PALOMARES, I. *et al.* Modelling experts' attitudes in group decision making. **Soft Computing**, v. 16, p. 1755-1766, May 2012.
- PARETO, V. **Cours d'economie politique**. Lousanne: Lousanne Rouge, 1886.

- PEDRYCZ, W.; EKEL, P.; PARREIRAS, R. **Fuzzy multicriteria decision-making: models, methods, and applications**. Chichester: John Wiley & Sons, 2011.
- PEDRYCZ, W.; GOMIDE, F. **An introduction to fuzzy sets: analysis and design**. Cambridge: MIT Press, 1998.
- PEREIRA JR., J. G. *et al.* On multicriteria decision making under conditions of uncertainty. **Information Sciences**, v. 324, p. 44-59, Dec. 2015.
- RAIFFA, H. **Decision analysis**. Reading: Addison-Wesley, 1968.
- ROY, B. To better respond to the robustness concern in decision aiding: Four proposals based on a twofold observation. *In*: ZOPOUNIDISM, C.; PARDALOS P. M. (ed.). **Handbook of multicriteria analysis**. Berlin: Springer-Verlag, 2010. p. 3-24.
- SAATY, T. L.; PENIWATI, K.; SHANG, J. S. The analytic hierarchy process and human resource allocation: half the story. **Mathematical and Computer Modelling**, v. 46, n. 7/8, p. 1041-1053, Oct. 2007.
- SAATY, T. L.; VARGAS, L. G.; DELLMAN, K. The allocation of intangible resources: the analytic hierarchy process and linear programming. **Socio-Economic Planning Sciences**, v. 37, p. 169-184, 2003.
- SAATY, T. **The analytic hierarchy process**. New York: McGraw-Hill, 1980.
- SKLYAROV, V. F.; PRAKHOVNIK, A. V.; EKEL, P. Ya. On the multicriteria power consumption control. **Electronic Modeling**, v. 9, n. 5, p. 61-65, 1987. (In Russian).
- SOBOL', I. M. On the systematic search in a hypercube. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 16, n. 1, p. 790-793, 1979.
- SOBOL', I. M.; STATNIKOV, R. B. **Choice of optimal parameters in problems with multiple criteria**. Moscow: Drofa, 2006. (In Russian).
- STEWART, T. Dealing with uncertainties in MCDA. *In*: FIGUEIRA, J.; GRECO, S.; EHRGOTT, M. (ed.). **Multiple criteria decision analysis: state of the art annotated surveys**. New York: Springer, 2005. p. 445-470. (International Series in Operations Research and Management Science).
- WEBSTER, T. J. **Managerial economics: theory and practice**. London: Academic Press, 2003.
- YAGER, R. R. Fuzzy decision making including unequal objectives. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 1, n. 2, p. 87-95, Apr. 1978.
- YAGER, R. R. On ordered weighted averaging operators in multicriteria decision making, **IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics**, v. 18, n. 1, p. 183-190, Jan./Feb. 1988.
- ZHANG, Q.; CHENA, J. C. H.; CHONG, P. P. Decision consolidation: criteria weight determination using multiple preference formats. **Decision Support Systems**, v. 38, n. 2, p. 247-258, Nov. 2004.

ZHANG, Q.; WANG, Y.; YANG, Y. Fuzzy multiple attribute decision making with eight types of preference information. *In*: IEEE SYMPOSIUM ON COMPUTATIONAL INTELLIGENCE IN MULTICRITERIA DECISION MAKING, 2007, Honolulu, Hawaii. **Proceedings** [...]. Piscataway: IEEE, 2007. p. 288-293.

ZIO, E.; PEDRONY, N. **Methods for representing uncertainty**: a literature review. Toulouse: FONSCI, 2013.

Construção de cenários para análise multicritério em condições de incerteza com base em informações quantitativas e qualitativas usando a decisão de grupo⁵

Leticia Ribeiro Figueiredo, Eduarda Asfora Frej, Gustavo Luis Soares, Petr Iakovlevitch Ekel, Mateus Toledo da Silveira Leão

1. Introdução

Entre as várias questões relacionadas com diferentes tipos de atividades de planejamento (planejamento estratégico, de inovação, de expansão etc.) surgem sempre duas questões fundamentais: “O que fazer?” e “Como fazer?” (Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011; Ramalho *et al.*, 2019). Para elaborar respostas à primeira questão normalmente torna-se necessário: (a) estabelecer objetivos e metas para os níveis correspondentes da hierarquia de planejamento e (b) avaliar, comparar, escolher, priorizar e/ou ordenar soluções ou alternativas (ações estratégicas, projetos de inovação, planos de expansão etc.).

Essas respostas são elaboradas pelo processamento de informações (Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011; Ramalho *et al.*, 2019) relacionadas a diferentes perspectivas ou critérios como “atratividade de investimento”, “nível de inovação”, “efeito político”, “eficiência de expansão”, “conforto operacional”, “manutenção flexibilidade” etc. Considerando isso, a avaliação, comparação, escolha, priorização e/ou ordenação de soluções ou alternativas devem ser realizadas, levando em consideração informações quantitativas (quantidades mensuráveis com diferentes níveis de incerteza), bem como informações qualitativas (baseadas no conhecimento, experiência e intuição dos especialistas envolvidos) (Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011; Ramalho *et al.*, 2019). As respostas à primeira questão fundamental podem ser elaboradas, por exemplo, através da construção e análise de modelos $\langle X, R \rangle$ (Ekel, 2002; Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011), associados à avaliação, comparação, escolha, priorização e/ou ordenação de soluções ou alternativas a partir de um conjunto discreto X com base em um vetor R de relações de preferência *fuzzy* e aplicado como modelos de tomada de decisão multiatributo (Hwang; Yoon, 1981; Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011).

A segunda questão (“Como fazer?”) está associada à alocação de diversos tipos de recursos (financeiros, energéticos, humanos etc.) ou à sua escassez entre soluções ou alternativas (ações estratégicas, projetos de inovação, projetos de novos negócios, planos de expansão, estratégias operacionais, ações de manutenção etc.) para atingir os objetivos e metas estabelecidos no grau máximo (Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011; Ramalho *et al.*, 2019). Embora essa alocação deva ser baseada na aplicação de informações quantitativas e qualitativas, na prática, ela é realizada considerando apenas informações quantitativas, muitas vezes ignorando completamente a sua incerteza (Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011;

⁵ **Reconhecimento:** A versão de registro deste artigo está publicada na *Group Decision and Negotiation*, e está disponível em: <https://doi.org/10.1007/s10726-021-09728-z>. FIGUEIREDO, L. R. *et al.* Group decision-based construction of scenarios for multicriteria analysis in conditions of uncertainty on the basis of quantitative and qualitative information. *Group Decision and Negotiation*, v. 30, p. 665-696, 2021.

Ramalho *et al.*, 2019). Considerando isto, em (Figueira; Greco, 2005) sublinha-se que os modelos de tomada de decisão multicritério baseiam-se em avaliações essencialmente determinísticas das consequências de cada ação expressas em termos de cada critério, podendo sujeitar os resultados finais e recomendações a um certo grau de análise de sensibilidade. Essa abordagem pode ser justificada quando a principal fonte de complexidade na tomada de decisões está associada à natureza multicritério do problema e não à natureza incerta das consequências individuais. No entanto, surgem situações, por exemplo, no planeamento estratégico, quando os riscos e as incertezas são tão críticos como a questão dos objetivos de gestão conflitantes. Nessas situações, torna-se necessária uma modelagem mais formal das incertezas (Figueira; Greco, 2005).

Tendo em conta o exposto, importa referir que a construção e análise de modelos $\langle X, F \rangle$ (Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011; Ramalho *et al.*, 2019) (associados à escolha de soluções ou alternativas de um conjunto X com base em um vector F de funções objetivo e aplicados como modelos de decisão multiobjetivo (Hwang; Masud, 1979), combinado com os resultados de Ekel *et al.* (2016), Ekel, Pedrycz e Pereira Jr (2019), Ekel, Martini e Palhares (2008) e Pereira Jr *et al.* (2015), pode fornecer respostas completas para a segunda questão fundamental.

Roy (2010) enfatiza a necessidade de produzir soluções robustas em análise multicritério. Os resultados de Ekel *et al.* (2016), Ekel, Pedrycz e Pereira Jr (2019), Ekel, Martini e Palhares (2008) e Pereira Jr *et al.* (2015) associados à generalização baseada em conjuntos *fuzzy* da abordagem clássica (Belyaev, 1977; Luce; Raiffa, 1958; Raiffa, 1968; Webster, 2003) para lidar com a incerteza da informação na tomada de decisão monocritério para problemas multicritério, podem servir para esse objetivo. Esses resultados permitem realizar análises multicritério sob condições de incerteza baseadas em abordagem possibilística, aplicando o esquema geral (Pereira Jr *et al.*, 2015) direcionado ao uso de informações quantitativas disponíveis em grau máximo para reduzir as regiões de incerteza de decisão. Se a sua utilização não conduzir a soluções únicas, o esquema geral pressupõe a utilização de informação qualitativa na fase de decisão final.

Contudo, nos últimos anos, surgem com maior frequência problemas que exigem a consideração de objetivos (atratividade de investimento, efeito político, flexibilidade de manutenção etc.) formados com base em informação qualitativa, em todas as fases do processo de decisão. Considerando isso, os resultados recentes de (Ramalho *et al.*, 2019) visam produzir soluções multicritério, incluindo soluções robustas multicritério, através da construção de combinações representativas de dados iniciais, estados da natureza ou cenários com a utilização imediata de informação qualitativa apresentada com informação quantitativa, fornecendo um processo de fusão de informações dentro de modelos $\langle X, F \rangle$.

A formação e utilização de informação qualitativa em (Ramalho *et al.*, 2019) está associada a estimativas de preferências individuais de especialistas, que são processadas e agregadas, dentro de um modelo de tomada de decisão multicritério em grupo, com base numa abordagem muito simples, sem construir e analisar diversos tipos de medidas de consenso. Considerando isso, o presente estudo, que é um desenvolvimento futuro dos resultados de (Ramalho *et al.*, 2019), está relacionado à construção de combinações representativas de dados iniciais, estados da natureza ou cenários com o uso direto de

informações qualitativas, baseadas nas estimativas de preferência individual de especialistas após estabelecer consenso dentro de um grupo de especialistas envolvidos. Em particular, trabalhamos com a análise de modelos $\langle X, F \rangle$ propondo um esquema de consenso para a tomada de decisão em grupo (permitindo diferentes formatos de apresentação de preferências, sua unificação e agregação), aplicando medidas de consenso e concordância que regulam o fluxo de informações. O esquema proposto sugere que qualquer especialista não pode apresentar avaliações separadas de preferências se não se sentir confortável para fazê-lo. Neste artigo, propomos métodos eficazes para determinar o peso dos especialistas e aplicamos métodos racionais para conduzir o processo de tomada de decisão. Essas características permitem superar as dificuldades inerentes às abordagens tradicionais (Bernardes *et al.*, 2008; Ekel *et al.*, 2009; Koksalmis; Kabak, 2019; Parreiras *et al.*, 2010).

Cabrerizo *et al.* (2017), Dong *et al.* (2015) e Ramanathan e Ganesh (1994) enfatizam a importância de se alcançar um nível satisfatório de concordância entre os membros do grupo para que a solução encontrada expresse o resultado mais unânime possível. Isso é confirmado pelo presente trabalho, cujos resultados permitem reduzir o nível de incerteza dos coeficientes das funções objetivo consideradas na análise de modelos $\langle X, F \rangle$ em condições de incerteza. Um exemplo de aplicação demonstra isso, bem como a possibilidade de obter uma decisão mais coerente e consistente, utilizando os resultados do presente trabalho.

As escolhas e combinações metodológicas utilizadas no presente trabalho constituem um importante aspecto original desta pesquisa. Os resultados apresentados são de caráter universal e podem ser aplicados, por exemplo, para resolver diferentes tipos de problemas de planejamento (estratégico, novos negócios, expansão etc.) com base na abordagem possibilística para gerar adequadamente soluções robustas multicritério.

O capítulo está organizado da seguinte forma. A Seção 2 apresenta o esquema geral da tomada de decisão multicritério em condições de incerteza. A Seção 3 descreve procedimentos para a formação de informações qualitativas com base em estimativas de preferências individuais de especialistas. A Seção 4 apresenta a metodologia para a formação e utilização de informações qualitativas com base nas estimativas de preferência dos especialistas do grupo com a construção de um consenso entre os membros do grupo. Na Seção 5, os resultados do artigo são aplicados à alocação de recursos financeiros no planejamento da expansão. Por fim, a Seção 6 apresenta as conclusões.

2. Esquema geral de tomada de decisão multicritério sob incerteza

Uma forma racional de lidar com o fator incerteza na tomada de decisão multiobjetivo (Ekel *et al.*, 2016; Ekel; Martini; Palhares, 2008; Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011; Pereira Jr *et al.*, 2015), baseada na abordagem possibilística, está associada à generalização da abordagem clássica para considerar a incerteza da informação na tomada de decisão monocritério (Belyaev, 1977; Luce; Raiffa, 1958; Raiffa, 1968; Webster, 2003). A abordagem clássica está associada à construção e análise das chamadas matrizes

de *payoff*, refletindo efeitos que podem ser obtidos para diferentes combinações de alternativas de solução e combinações representativas de dados iniciais, estados de natureza ou cenários, para gerar soluções robustas. A aplicação dos resultados de (Belyaev, 1977; Ekel; Pedrycz; Pereira Jr., 2019; Orlovsky, 1983) está associada às seguintes etapas: (a) Formulação matemática do problema; (b) Construção das combinações representativas de dados iniciais, estados de natureza ou cenários; (c) Definição de alternativas de solução; (d) Construção de matrizes de *payoff*; (e) Análise de matrizes de *payoff* e escolha de soluções racionais.

A incerteza dos dados iniciais requer a transformação das funções objetivo tradicionais $F_p(X)$, $p = 1, 2, \dots, q$, por exemplo, funções objetivo lineares, porque devem incluir a descrição correspondente dos coeficientes. Neste trabalho, assim como em (Ekel *et al.*, 2016; Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011; Ramalho *et al.*, 2019), como tal descrição, aplicamos um intervalo, que obteve uma ampla gama de aplicações (Zio; Pedroni, 2013). Considerando isso, as funções objetivo são representadas como:

$$F_p(X) = \sum [c'_{pk}, c''_{pk}] x_k, p = 1, 2, \dots, q, k = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

sendo c'_{pk} e c''_{pk} os limites inferior e superior, respectivamente, de c_{pk} , $p = 1, 2, \dots, q, k = 1, 2, \dots, n$.

Considerando as recomendações de (Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011; Pereira Jr *et al.*, 2015), no presente trabalho, as chamadas LP_t sequências (Sobol, 1979) são utilizadas para construir estados representativos dos dados iniciais. Essas sequências possuem características superiores de uniformidade entre outras sequências uniformemente distribuídas (Sobol; Statnikov, 2006; Sobol, 1979). Os resultados de Sobol e Statnikov (2006) e Sobol (1979) permitem gerar pontos Q_s , $s = 1, 2, \dots, S$ (S é o número dos estados representativos dos dados iniciais) com coordenadas q_{ts} , $s = 1, 2, \dots, S, t = 1, 2, \dots, T$, no hipercubo unitário correspondente Q^T (T é o número de coeficientes das funções objetivo). Os pontos de sequências uniformemente distribuídas Q^T podem ser transformados no hipercubo C^T definido pelos limites inferior c'_t , $t = 1, 2, \dots, T$ e superior c''_t , $t = 1, 2, \dots, T$ dos coeficientes correspondentes c'_{pk} , $p = 1, 2, \dots, q, k = 1, 2, \dots, n$ e c''_{pk} , $p = 1, 2, \dots, q, k = 1, 2, \dots, n$ para a função objetivo (1) da seguinte forma:

$$c_{st} = c'_t + (c''_t - c'_t) q_{ts}, s = 1, 2, \dots, S, t = 1, 2, \dots, T \quad (2)$$

para formar uma sequência uniformemente distribuída em C^T .

A utilização de (2) serve para a construção de problemas multiobjetivos com coeficientes determinísticos. Considerando isso, com base em (1), as funções objetivo para cada cenário Y_s , $s = 1, 2, \dots, S$ podem ser escritas como:

$$F_p(X, Y_s) = \sum c_{pks} x_k, p = 1, 2, \dots, q, s = 1, 2, \dots, S \quad (3)$$

A definição de alternativas de solução se reduz à análise de modelos $\langle X, F \rangle$ quando um vetor de funções objetivo $F(X) = \{F_1(X), F_2(X), \dots, F_p(X), \dots, F_q(X)\}$ é considerado, e o problema é a otimização simultânea de todas elas, ou seja,

$$F_p(X) \rightarrow \text{extr}, p = 1, 2, 3, \dots, q \quad (4)$$

sendo L uma região viável em $\mathbb{R}^n$.

A etapa formal na análise (4) é a determinação de um conjunto de soluções ótimas de Pareto $\Omega \in L$ (Ehrgott, 2005; Hwang; Masud, 1979). Essa etapa é útil, mas não permite obter soluções únicas. Aplicando informações fornecidas pelo tomador de decisão (DM), é possível escolher uma determinada solução de Pareto. Existem três abordagens para utilizar essas informações (Coelho, 2005; Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011): *a priori*, *a posteriori* e adaptativa.

O desenvolvimento de métodos multiobjetivos é realizado em diversas direções (Ehrgott, 2005; Hwang; Masud, 1979; Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011), por exemplo. Sem a sua discussão, é necessário indicar que uma questão importante na análise de modelos multiobjetivo é a qualidade da solução. Pode ser considerada alta se os níveis de satisfação dos objetivos forem iguais ou próximos entre si (produzindo a noção de soluções harmoniosas (Cabrerizo *et al.*, 2017; Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011) quando os níveis de importância dos objetivos são iguais (essa noção é estendida em (Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011) para o caso quando os níveis de importância dos objetivos são diferentes). Considerando isso, deve-se enfatizar a validade da aplicação da direção relacionada ao princípio do resultado garantido (Ekel, 2002; Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011). Outras direções podem levar a soluções com altos níveis de satisfação de alguns objetivos, alcançado por baixos níveis de satisfação de outros objetivos (Ekel; Galperin, 2003; Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011).

A complexidade metodológica básica na análise de modelos multiobjetivos é a falta de clareza do conceito de “solução ótima”. Ao utilizar a abordagem Bellman-Zadeh para tomada de decisão em um ambiente *fuzzy* (Bellman; Zadeh, 1970; Pedrycz; Gomide, 1998) para resolver problemas multicritério, esse conceito é definido da seguinte forma: o grau máximo de implementação de todos os objetivos. Está em conformidade com o princípio do resultado garantido e permite produzir soluções harmoniosas. A aplicação da abordagem Bellman-Zadeh permite realizar uma geração de soluções ($X_{\alpha+1}^0 \in \Omega \subseteq L$) rigorosa e também um método computacionalmente eficaz para resolver problemas multiobjetivos (Ekel, 2002; Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011).

Ao aplicar a abordagem Bellman-Zadeh à tomada de decisão em um ambiente *fuzzy* para resolver problemas multiobjetivos, $F_p(X), p = 1, 2, \dots, q$ são substituídos por conjuntos *fuzzy* $A_p = \{X, \mu_{A_p}(X)\}, p = 1, 2, \dots, q$, que permitem construir uma solução *fuzzy* como acontece $D = \bigcap_{p=1}^q A_p$ com uma função de pertinência

$$\mu_D(X) = \min_{p=1,2,\dots,q} \mu_{A_p}(X), X \in L \quad (5)$$

Deve-se notar que (5) pode ser modificado com o objetivo de ajustar o grau de “otimismo-pessimismo” da decisão usando o operador de média ponderada ordenada (OWA), originalmente proposto em (Yager, 1988).

A utilização de (5) permite formar uma solução com

$$\max \mu_D(X) = \max_{X \in L} \min_{p=1,2,\dots,q} \mu_{A_p}(X) \quad (6)$$

reduzindo (4) para encontrar

$$X^0 = \underset{X \in L}{argmax} \underset{p=1,2,\dots,q}{min} \mu_{A_p} \quad (7)$$

As funções de pertinência $\mu_{A_p}(X), p = 1, 2, \dots, q$ podem ser expressas (Ekel, 2011; Ekel, Martini, Palhares, 2008; Pedrycz, Gomide, 1998) como

$$\mu_{A_p}(X) = \left[\frac{f_p(X) - \min_{X \in L} f_p(X)}{\max_{X \in L} f_p(X) - \min_{X \in L} f_p(X)} \right]^{\lambda_p} \quad (8)$$

para funções objetivo maximizadas e

$$\mu_{A_p}(X) = \left[\frac{\max_{X \in L} f_p(X) - f_p(X)}{\max_{X \in L} f_p(X) - \min_{X \in L} f_p(X)} \right]^{\lambda_p} \quad (9)$$

para funções objetivo minimizadas. Em (8) e (9), $\lambda_p, p = 1, 2, \dots, q$ são fatores de importância.

Como X^0 é para pertencer $\Omega \subseteq L$, é preciso construir

$$\tilde{\mu}_D(X) = \min \left\{ \min_{p=1,2,\dots,q} \mu_{A_p}(X), \mu_{\pi}(X) \right\} \quad (10)$$

sendo $\mu_{\pi}(X) = 1$ se $X \in \Omega$ e $\mu_{\pi}(X) = 0$ se $X \notin \Omega$.

Utilizando (7) para resolver o problema (5), é possível obter S soluções correspondentes aos cenários considerados. Do conjunto de S soluções, um subconjunto de K diferentes soluções ($X_k, k = 1, 2, \dots, K$) é selecionado para a construção de matrizes de *payoff*.

Considerando as soluções $X_k, k = 1, 2, \dots, K$ e as combinações representativas de dados iniciais, estados de natureza ou cenários $Y_s, s = 1, 2, \dots, S$, pode-se construir a matriz de *payoff* (Tabela 1).

Para obter a matriz de *payoff*, aplica-se cada solução $X_k, k = 1, 2, \dots, n$ a cada uma função $F_p(X, Y_s) (p = 1, 2, \dots, q)$ para todos os cenários $Y_s, s = 1, 2, \dots, S$.

Tabela 1. Matriz de *payoff* para a p -ésima função objetivo

	Y_1	...	Y_s	...	Y_S
X_1	$F_p(X_1, Y_1)$	...	$F_p(X_1, Y_s)$	...	$F_p(X_1, Y_S)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
X_k	$F_p(X_k, Y_1)$	...	$F_p(X_k, Y_s)$	...	$F_p(X_k, Y_S)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
X_K	$F_p(X_K, Y_1)$	...	$F_p(X_K, Y_s)$	...	$F_p(X_K, Y_S)$

A análise das matrizes de *payoff* e a escolha das alternativas de solução racional baseiam-se na utilização dos chamados critérios de escolha (Belyaev, 1977; Luce; Raiffa, 1958; Raiffa, 1968; Webster, 2003). Neste trabalho, aplicamos os critérios de escolha de Wald, Laplace, Savage e Hurwicz, que são de caráter geral e foram aplicados com sucesso na prática (Belyaev, 1977; Webster, 2003). A sua utilização está associada às seguintes estimativas características: nível mínimo da função objetivo $F^{\min}(X_k) = \min_{1 \leq s \leq S} F(X_k, Y_s)$; o nível máximo da função objetivo $F^{\max}(X_k) = \max_{1 \leq s \leq S} F(X_k, Y_s)$; o nível médio da função objetivo $\bar{F}(X_k) = \frac{1}{S} \sum F(X_k, Y_s)$; o nível máximo de risco (arrependimento) $R^{\max}(X_k) = \max_{1 \leq s \leq S} R(X_k, Y_s)$, onde $R(X_k, Y_s)$ ocorre um gasto excessivo sob a combinação do estado de natureza Y_s e a escolha da alternativa de solução X_k em vez da alternativa de solução que é localmente ótima para o dado Y_s .

Todas as estimativas características podem ser representadas como uma matriz (Tabela 2). Utilizando-as é possível apresentar os critérios de escolha de Wald, Laplace, Savage e Hurwicz. Os critérios de escolha são representados abaixo sob a suposição, para maior certeza, de que a função objetivo deve ser minimizada. Em particular, o critério de Wald permite escolher X^W fornecer

$$\min_{1 \leq k \leq K} F^{\max}(X_k) = \min_{1 \leq k \leq K} \max_{1 \leq s \leq S} F(X_k, Y_s) \quad (11)$$

O critério de escolha de Laplace está orientado a escolher X^L o que proporciona

$$\min_{1 \leq k \leq K} \bar{F}(X_k) = \min_{1 \leq k \leq K} \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \bar{F}(X_k, Y_s) \quad (12)$$

O critério de escolha de Savage permite escolher X^S garantindo

$$\min_{1 \leq k \leq K} R^{\max}(X_k) = \min_{1 \leq k \leq K} \max_{1 \leq s \leq S} R(X_k, Y_s) \quad (13)$$

Finalmente, o critério de escolha de Hurwicz utiliza uma combinação linear de $F^{\min}(X_k)$ e $F^{\max}(X_k)$, e permite escolher X^H fornecendo

$$\min_{1 \leq k \leq K} [\alpha F^{\max}(X_k) + (1 - \alpha) F^{\min}(X_k)] = \min_{1 \leq k \leq K} [\alpha \max_{1 \leq s \leq S} F(X_k, Y_s) + (1 - \alpha) \min_{1 \leq s \leq S} F(X_k, Y_s)] \quad (14)$$

sendo $\alpha \in [0,1]$ o índice “pessimismo-otimismo” cuja magnitude é definida pelo DM.

Tabela 2. Matriz com as estimativas características da p -ésima função objetivo

	$F_p^{\max}(X_k)$	$F_p^{\min}(X_k)$	$\bar{F}_p(X_k)$	$R_p^{\max}(X_k)$
X_1	$F_p^{\max}(X_1)$	$F_p^{\min}(X_1)$	$\bar{F}_p(X_1)$	$R_p^{\max}(X_1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
X_k	$F_p^{\max}(X_k)$	$F_p^{\min}(X_k)$	$\bar{F}_p(X_k)$	$R_p^{\max}(X_k)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
X_K	$F_p^{\max}(X_K)$	$F_p^{\min}(X_K)$	$\bar{F}_p(X_K)$	$R_p^{\max}(X_K)$

Considerando que os critérios de escolha estão associados às estimativas características, pode-se considerar (Ekel *et al.*, 2016; Ekel; Pedrycz; Pereira Jr., 2019; Pereira Jr. *et al.*, 2015) os critérios de escolha (11-14) como funções objetivo para a p th função objetivo:

$$F_p^W(X_k) = F_p^{max}(X_k) = \max_{1 \leq s \leq S} F(X_k, Y_s) \quad (15)$$

$$F_p^L(X_k) = \bar{F}_p(X_k) = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S F_p(X_k, Y_s) \quad (16)$$

$$F_p^S(X_k) = R_p^{max}(X_k) = \max_{1 \leq s \leq S} R_p(X_k, Y_s) \quad (17)$$

$$F_p^H(X_k) = \alpha F_p^{max}(X_k) + (1 - \alpha) F_p^{min}(X_k) = \alpha \max_{1 \leq s \leq S} F_p(X_k, Y_s) + (1 - \alpha) \min_{1 \leq s \leq S} F_p(X_k, Y_s) \quad (18)$$

A representação dos critérios de escolha como funções objetivo permite construir $M \leq 4$ problemas (de acordo com o número de critérios de escolha considerados) da seguinte forma:

$$F_{r,p}(X) \rightarrow \text{extr}, r = 1, 2, \dots, M \leq 4, p = 1, 2, \dots, q \quad (19)$$

sendo $F_{1,p}(X) = F_p^W(X_k)$, $F_{3,p}(X) = F_p^S(X_k)$, $F_{2,p}(X) = F_p^L(X_k)$ e $F_{4,p}(X) = F_p^H(X_k)$.

No caso da aplicação de $F_{1,p}(X) = F_p^W(X_k)$ ou $F_{3,p}(X) = F_p^S(X_k)$, podemos falar em obter soluções robustas multicritério (Ekel; Pedrycz; Pereira Jr., 2019; Ramalho *et al.*, 2019). A utilização de $F_{4,p}(X) = F_p^H(X_k)$ com $\alpha = 1$ (o critério de escolha de Hurwicz é reduzido ao critério de escolha de Wald) também fornece soluções robustas.

Aplicando (19) a q matrizes com estimativas características (Tabela 2), é possível construir q matrizes com estimativas de critérios de escolha mostradas na Tabela 3, que refletem o desempenho de cada alternativa de solução com base nos critérios de escolha de Wald, Laplace, Savage e Hurwicz.

Tabela 3. Matriz com as estimativas dos critérios de escolha para a p -ésima função objetivo

	$F_p^W(X_k)$	$F_p^L(X_k)$	$F_p^S(X_k)$	$F_p^H(X_k)$
X_1	$F_p^W(X_1)$	$F_p^L(X_1)$	$F_p^S(X_1)$	$F_p^H(X_1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
X_k	$F_p^W(X_k)$	$F_p^L(X_k)$	$F_p^S(X_k)$	$F_p^H(X_k)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
X_K	$F_p^W(X_K)$	$F_p^L(X_K)$	$F_p^S(X_K)$	$F_p^H(X_K)$
	$\min_{1 \leq k \leq K} F_p^W(X_k)$	$\min_{1 \leq k \leq K} F_p^L(X_k)$	$\min_{1 \leq k \leq K} F_p^S(X_k)$	$\min_{1 \leq k \leq K} F_p^H(X_k)$
	$\max_{1 \leq k \leq K} F_p^W(X_k)$	$\max_{1 \leq k \leq K} F_p^L(X_k)$	$\max_{1 \leq k \leq K} F_p^S(X_k)$	$\max_{1 \leq k \leq K} F_p^H(X_k)$

A aplicação de (8) ou (9) à matriz com os níveis de critérios de escolha da Tabela 3 permite construir as funções de pertinência para $F_{r,p}(X)$, $r = 1, 2, \dots, M$ obter os níveis de critérios de escolha *fuzzy* para a p -ésima função objetivo (Tabela 4).

Tabela 4. Matriz modificada com as estimativas dos critérios de escolha para a p -ésima função objetivo

	$\mu_{A_p}^W(X_k)$	$\mu_{A_p}^L(X_k)$	$\mu_{A_p}^S(X_k)$	$\mu_{A_p}^H(X_k)$
X_1	$\mu_{A_p}^W(X_1)$	$\mu_{A_p}^L(X_1)$	$\mu_{A_p}^S(X_1)$	$\mu_{A_p}^H(X_1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
X_k	$\mu_{A_p}^W(X_k)$	$\mu_{A_p}^L(X_k)$	$\mu_{A_p}^S(X_k)$	$\mu_{A_p}^H(X_k)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
X_K	$\mu_{A_p}^W(X_K)$	$\mu_{A_p}^L(X_K)$	$\mu_{A_p}^S(X_K)$	$\mu_{A_p}^H(X_K)$

Continuando a análise com os dados da Tabela 4, pode-se aplicar (5) para X_k , $k = 1, 2, \dots, K$ construir a matriz com níveis de critérios de escolha *fuzzy* agregados (lembre-se de que (5) pode ser modificado com o uso do operador OWA (Yager, 1988), que é mostrada na Tabela 5. Por fim, utiliza-se (6) considerando as estimativas apresentadas na Tabela 5 para encontrar as melhores alternativas de solução para cada critério de escolha. Com base em (6), as estimativas $\max_{1 \leq k \leq K} \mu_D^W(X_k)$, $\max_{1 \leq k \leq K} \mu_D^L(X_k)$, $\max_{1 \leq k \leq K} \mu_D^S(X_k)$ e $\max_{1 \leq k \leq K} \mu_D^H(X_k)$ levam a X^W , X^L , X^S e X^H , respectivamente. A análise multiobjetivo, realizada dessa forma, é eficaz para lidar com a incerteza e garante a escolha das alternativas de solução racional de acordo com o princípio ótimo de Pareto (Ekel; Pedrycz; Pereira Jr., 2019; Pereira Jr *et al.*, 2015).

Tabela 5. Matriz com os níveis agregados das estimativas dos critérios de escolha *fuzzy*

	$\mu_D^W(X_k)$	$\mu_D^L(X_k)$	$\mu_D^S(X_k)$	$\mu_D^H(X_k)$
X_1	$\mu_D^W(X_1)$	$\mu_D^L(X_1)$	$\mu_D^S(X_1)$	$\mu_D^H(X_1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
X_k	$\mu_D^W(X_k)$	$\mu_D^L(X_k)$	$\mu_D^S(X_k)$	$\mu_D^H(X_k)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
X_K	$\mu_D^W(X_K)$	$\mu_D^L(X_K)$	$\mu_D^S(X_K)$	$\mu_D^H(X_K)$
	$\max_{1 \leq k \leq K} \mu_D^W(X_k)$	$\max_{1 \leq k \leq K} \mu_D^L(X_k)$	$\max_{1 \leq k \leq K} \mu_D^S(X_k)$	$\max_{1 \leq k \leq K} \mu_D^H(X_k)$

Com base nos resultados discutidos acima, o esquema geral de tomada de decisão multicritério sob condições de incerteza de informação é proposto em (Pereira Jr *et al.*, 2015). No caso geral, está associado às seguintes etapas:

1. A *primeira etapa* é construir q matrizes de *payoff*. Para construir matrizes de *payoff* é necessário resolver S problemas multicritério formalizados no âmbito de modelos $\langle X, F \rangle$. Ao resolvê-los é possível obter as alternativas de solução $X_k, k = 1, 2, \dots, K (K \leq S)$. Depois disso, $X_k, k = 1, 2, \dots, K$ são substituídos em $F_p(X), k = 1, 2, \dots, K$ para $Y_s(X), s = 1, 2, \dots, S$. Essas substituições geram q matrizes de *payoff*.
2. A *segunda etapa* está relacionada à análise das matrizes de *payoff* obtidas. A execução dessa etapa baseia-se na abordagem apresentada acima, considerando os critérios de escolha como funções objetivo. No entanto, a insuficiente capacidade de resolução da presente fase pode levar a soluções não únicas e esta circunstância exige a aplicação da *terceira etapa*.
3. A *terceira etapa* está associada à construção e análise de modelos $\langle X, F \rangle$ para a subsequente redução das regiões de incerteza de decisão. Como foi indicado acima, a utilização de modelos $\langle X, F \rangle$ permite levar em conta índices de caráter quantitativo e qualitativo (baseados no conhecimento, experiência e intuição dos especialistas envolvidos).

3. A formação e uso de informações qualitativas com base em estimativas de preferências individuais de especialistas

A aplicação dos resultados de (Ekel; Pedrycz; Pereira Jr., 2019; Ramalho *et al.*, 2019) está associada às seguintes etapas: (a) Elicitação de preferências; (b) Representação de preferências dentro de relações de preferência multiplicativas; (c) Definição de vetores de preferência através da aplicação do Processo Hierárquico Analítico (AHP) (Saaty, 1980); (d) Agregação de preferências e geração de combinações representativas de dados iniciais, estados da natureza ou cenários.

As funções objetivo formadas com base em informações qualitativas devem incluir elementos que reflitam as preferências de um ou mais especialistas envolvidos, expressas pelas correspondentes estruturas ou formatos de preferência. Em particular, em (Ekel; Pedrycz; Pereira Jr., 2019; Ramalho *et al.*, 2019), são considerados os seguintes formatos, que podem ser utilizados para estabelecer preferências: ordenação de alternativas (OA); relação de preferência *fuzzy* recíproca aditiva (RR); relação de preferência *fuzzy* não recíproca (NR); estimativa *fuzzy* (FE); relação de preferência multiplicativa (MR).

Deve-se notar que as relações de preferência *fuzzy* não recíprocas e as estimativas *fuzzy* são, até certo ponto, equivalentes. Em particular, se duas alternativas $x_k \in X$ e $x_l \in X$ têm estimativas *fuzzy* com as funções de pertinência $\mu(x_k)$ e $\mu(x_l)$, então a quantidade $NR(x_k, x_l)$ é o grau de preferência $\mu(x_k) \geq \mu(x_l)$, enquanto a quantidade $NR(x_l, x_k)$ é o grau de preferência $\mu(x_l) \geq \mu(x_k)$. Aplicando o conceito de relação de preferência generalizada (Orlovsky, 1983), as quantidades $NR(x_k, x_l)$ e $NR(x_l, x_k)$ podem ser avaliadas da seguinte forma (Ekel; Pedrycz; Schinzinger, 1998; Ekel; Schuffner Neto, 2006):

$$NR(x_k, x_l) = \sup_{x_k, x_l \in X} \min\{\mu(x_k), \mu(x_l), \mu_R(x_k, x_l)\} \quad (20)$$

$$NR(x_l, x_k) = \sup_{x_k, x_l \in X} \min\{\mu(x_k), \mu(x_l), \mu_R(x_l, x_k)\} \quad (21)$$

sendo $\mu_R(x_k, x_l)$ e $\mu_R(x_l, x_k)$ as funções de pertinência das correspondentes relações de preferência *fuzzy* que, respectivamente, refletem a essência das preferências de x_k sobre x_l e de x_l sobre x_k (por exemplo, “mais atraente”, “mais flexível” etc.). Quando o indicador em termos de quais alternativas x_k e x_l são avaliadas pode ser medido em uma escala numérica e se a essência da preferência por trás da relação R é coerente com a ordem natural ($\leq$) ao longo do eixo dos valores medidos deste indicador, então (20) e (21) são reduzidos a

$$NR(x_k, x_l) = \sup_{x_k \leq x_l} \min_{x_k, x_l \in X} \{\mu(x_k), \mu(x_l)\} \quad (22)$$

$$NR(x_l, x_k) = \sup_{x_l \leq x_k} \min_{x_k, x_l \in X} \{\mu(x_k), \mu(x_l)\} \quad (23)$$

respectivamente. Se o indicador tiver caráter de maximização, (22) e (23) devem ser escritos para $x_k \geq x_l$ e $x_l \geq x_k$, respectivamente. Assim, a disponibilidade de estimativas *fuzzy* para todos x_k em X suporta uma construção automática de $NR(x_k, x_l)$.

Conforme mostrado em Saaty, Peniwati e Shang (2007) e Saaty, Vargas e Dellman (2003), os componentes de um vetor de preferências fornecidos pela utilização do AHP podem ser utilizados como coeficientes para a formação das funções objetivo correspondentes. O uso do AHP é baseado na construção e processamento das relações de preferência multiplicativas Saaty (1980). Assim, é necessário ter disponíveis funções de transformação (Ekel; Pedrycz; Pereira Jr., 2019; Herrera; Herrera-Viedma; Chiclana, 2001; Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011; Ramalho *et al.*, 2019; Zhang; Chena; Chong, 2004) que permitam converter os formatos indicados acima (ordenação de alternativas, relações de preferência *fuzzy* recíprocas aditivas e relações de preferência *fuzzy* não recíprocas) para o formato de preferência relações multiplicativas.

Levando em consideração o exposto, é necessário indicar que nem sempre há a transformação direta de qualquer formato de preferência para a relação de preferência multiplicativa (Ramalho *et al.*, 2019). Por exemplo, entre os formatos de preferência indicados acima, não há conversão direta das relações de preferência *fuzzy* não recíprocas para a relação de preferência *fuzzy* multiplicativa. Requer a conversão preliminar das relações de preferência *fuzzy* não recíprocas em relações de preferência *fuzzy* recíprocas aditivas ($NR \rightarrow RR$). Como um todo, os resultados discutidos em (Ramalho *et al.*, 2019) permitem realizar as seguintes transformações.

$$OA(x_k, x_l) \rightarrow MR(x_k, x_l) = 9^{\frac{OA(x_l) - OA(x_k)}{n-1}}, n > 1 \quad (24)$$

$$NR(x_k, x_l) \rightarrow RR(x_k, x_l) = \frac{1}{2}(1 + RN(x_k, x_l) - RN(x_l, x_k)) \quad (25)$$

$$RR(x_k, x_l) \rightarrow MR(x_k, x_l) = 9^{2RR(x_k, x_l) - 1}, n > 1 \quad (26)$$

Os autovetores correspondentes às relações de preferência multiplicativas devem ser agregados e utilizados como combinações representativas de dados iniciais, estado de natureza ou cenários.

A ideia principal dessa etapa (Ramalho *et al.*, 2019) é utilizar o nível de “ORness”, fornecido pelo operador OWA como resultado da alteração do conjunto de pesos correspondentes $w_i, i = 1, 2, \dots, n$ (Yager, 1988) e da geração de combinações representativas de dados iniciais, estados de natureza ou cenários com base na aplicação das LP_τ sequências (Sobol; Statnikov, 2006; Sobol, 1979) cuja aplicação foi discutida acima. Essa geração deverá fornecer combinações representativas de dados iniciais, estados da natureza ou cenários equilibrados do ponto de vista de uma mistura justificada de situações pessimistas e otimistas. A implementação dessa ideia (Ekel; Pedrycz; Pereira Jr., 2019; Ramalho *et al.*, 2019) está associada à agregação das opiniões dos especialistas extraíndo os limites do pessimismo/otimismo aceites pelo DM.

4. A formação e uso de informações qualitativas com base em estimativas de preferência de especialistas do grupo

Como foi indicado acima, os resultados de Ramalho *et al.* (2019), em primeiro lugar, são direcionados ao uso de informações qualitativas (estimativas de preferência de especialistas) para construir estimativas de coeficientes de função objetivo servindo para construir combinações representativas de dados iniciais, estados de natureza ou cenários. No entanto, a abordagem aplicada para gerar preferências de grupo com base em estimativas de preferências individuais de especialistas é demasiado simples e não supõe a construção do consenso correspondente. Levando isso em consideração, discutimos a seguir um esquema de consenso para o processo de tomada de decisão e ao obter a uma opinião consensual entre os membros do grupo, o nível de incerteza dos coeficientes da função objetivo é reduzido. Isso resulta em estimativas de coeficientes mais precisas e, consequentemente, em decisões mais consistentes, coerentes e menos conservadoras.

Conceitualmente, a tomada de decisão em grupo é o processo de obtenção de soluções baseadas nas preferências de vários especialistas. Um problema típico de tomada de decisão em grupo envolve um conjunto de especialistas $E = \{e_1, e_2, \dots, e_v\}$, um conjunto de critérios $C = \{c_1, c_2, \dots, c_q\}$ e um conjunto de alternativas $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ (Ekel *et al.*, 2009). Cada critério corresponde a um dos pontos de vista, segundo os quais as alternativas são avaliadas e comparadas por especialistas. Levando isso em consideração, é necessário indicar que qualquer especialista envolvido no processo de tomada de decisão ou qualquer critério considerado pode exigir diferentes formatos de representação de preferências (os mais importantes são mencionados na Seção 3).

A utilização de diferentes formatos de representação de preferências gera a heterogeneidade de informações para a tomada de decisão. Assim, é necessário processar diferentes formatos para fornecer informação homogênea (uniforme) para os processos de tomada de decisão, reduzindo os diferentes formatos a um formato único (isso pode ser feito, como foi indicado acima, com base na aplicação das correspondentes funções

de transformação (Parreiras; Ekel, 2013; Ramalho *et al.*, 2019). Parreiras e Ekel (2013) fundamentam o uso de relações de preferência *fuzzy* (em particular, relações de preferência *fuzzy* não recíprocas) como formato de referência. As relações de preferência *fuzzy* fornecem flexibilidade, que é necessária para lidar adequadamente com o fator de incerteza. Além disso, as diversas medidas de consenso e concordância utilizam o formato de relação de preferência *fuzzy* como padrão de entrada (Alonso *et al.*, 2007; Ekel *et al.*, 2009; Parreiras; Ekel; Bernardes Jr., 2012a; Parreiras *et al.*, 2010, 2011). Levando isso em consideração, é possível utilizar as seguintes funções de transformação:

$$OA(x_k, x_l) \rightarrow NR(x_k, x_l) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{OA(x_l) - OA(x_k)}{2(n-1)} & , \text{ if } OA(x_k) > OA(x_l) \\ 1 & , \text{ if } OA(x_k) \leq OA(x_l) \end{cases} \quad (27)$$

$$MR(x_k, x_l) \rightarrow NR(x_k, x_l) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2} \log_9 \frac{MR(x_k, x_l)}{MR(x_l, x_k)} & , \text{ if } \log_9 MR(x_k, x_l) < 0 \\ 1 & , \text{ if } \log_9 MR(x_k, x_l) \geq 0 \end{cases} \quad (28)$$

Quando a informação é homogênea, as preferências individuais são agregadas numa relação de preferência coletiva. No contexto da tomada de decisão em grupo, por vezes é relevante diferenciar os níveis de influência de cada especialista. A forma mais comum de incorporar esses níveis de influência é atribuir diferentes fatores de importância aos membros do grupo. A literatura sobre tomada de decisão em grupo (ver uma visão geral (Koksalmis; Kabak, 2019)) identifica três grupos de técnicas para derivar os pesos dos tomadores de decisão: técnicas subjetivas, técnicas objetivas e a combinação de técnicas subjetivas e objetivas.

Na utilização de técnicas subjetivas, um supervisor avalia os DMs e atribui pesos a cada um deles (Ekel *et al.*, 2009). Outra forma de utilização de métodos subjetivos está associada às avaliações mútuas dos DMs (Lootsma, 2007; Ramanathan; Ganesh, 1994). Contudo, essa forma pode levar à superestimação de determinados membros do grupo e, até mesmo, à formação de coalizões de decisão. Na utilização de métodos objetivos, métodos numéricos são aplicados para determinar os pesos dos DMs. Por exemplo, Toloie-Eshlaghy e Farokhi (2011) determinam os pesos dos DMs de acordo com a consistência de suas preferências.

No método combinado, esses dois pesos são integrados em um peso, que reflete os efeitos dos pesos objetivos e subjetivos (Koksalmis; Kabak, 2019). A aplicação desse método é apresentada em Koksalmis, Koksalmis e Kabak (2019), onde os pesos combinados dos DMs são calculados com base em pesos objetivos utilizando o índice geométrico de consenso cardinal e os pesos subjetivos fornecidos por um supervisor. A técnica começa calculando os vetores de prioridade das alternativas da matriz de preferência ($k = 1, 2, \dots, n$) de cada DM pelo método LSM (média geométrica das linhas da matriz), considerando a matriz de preferência expressa no formato *MR*, conforme segue:

$$w_k = \frac{\prod MR(x_k, x_l)}{\sum \prod MR(x_k, x_l)}, k = 1, 2, \dots, n \quad (29)$$

Esses vetores de prioridade são agregados através do operador de média aritmética, obtendo-se o vetor de prioridade do grupo. O índice geométrico de consenso cardinal para cada DM ($y = 1, 2, \dots, v$) é calculado como

$$GCC I(A^y) = \frac{2}{(n-1)(n-2)} \sum_{k < l, k, l=1}^n \left(\ln \left(MR^y(x_k, x_l) - \ln(w_k^G) + \ln(w_l^G) \right)^2 \right) \quad (30)$$

O uso de (30) permite obter o peso objetivo

$$w_o^y = \frac{(GCC I^y)^{-1}}{\sum (GCC I^y)^{-1}} \quad (31)$$

Os pesos objetivos dos DMs (w_o^y) são integrados aos pesos subjetivos (w_s^y) fornecidos por um supervisor e aos pesos combinados (w_c^y) da seguinte forma:

$$w_c^y = \alpha(w_o^y) + (1 - \alpha)(w_s^y) \quad (32)$$

sendo α a proporção do impacto dos pesos subjetivos e objetivos.

A matriz de preferências coletivas, tendo em conta os pesos correspondentes, se necessário, pode ser obtida por métodos de agregação. Deve-se notar que os procedimentos de agregação podem ser realizados em diferentes pontos ao longo do processo de discussão. Em particular, Parreiras, Ekel e Moraes (2012) distinguem as seguintes três abordagens de agregação para lidar com os processos de tomada de decisão multicritério, envolvendo vários especialistas:

1. Agregação de Avaliações Individuais (AIE): Os especialistas devem avaliar cada alternativa usando estimativas *fuzzy* ou linguísticas. Em seguida, as estimativas individuais fornecidas, considerando cada critério, são agregadas em estimativas coletivas. De posse da matriz de avaliação das alternativas é possível construir relações de preferência *fuzzy* por critério. A partir daí, uma das técnicas de análise $\langle X, F \rangle$ pode ser utilizada.
2. Agregação de Preferências Individuais por Critério (AIC): Os especialistas podem fornecer suas preferências para cada critério usando qualquer formato de preferência, que pode ser transformado em relações de preferência *fuzzy*, aplicando as funções de transformação correspondentes. As matrizes individuais resultantes são agregadas em preferências coletivas por critério. Então, uma das técnicas de análise de modelos $\langle X, F \rangle$ pode ser utilizada.
3. Agregação de Resultados Individuais (AR): O problema de tomada de decisão multicritério é resolvido individualmente e os resultados são combinados em um resultado coletivo. Quando AR é usado *a priori*, os DMs podem selecionar diferentes métodos de tomada de decisão multicritério para resolver o problema. Porém, a utilização de diferentes métodos pode aumentar as diferenças entre os resultados obtidos e pode dificultar a construção de resultados de agregação satisfatórios.

Dentre os operadores comumente utilizados (Dong *et al.*, 2015; Parreiras; Ekel; Bernandes Jr., 2012a; Parreiras *et al.*, 2010), é possível indicar o operador mínimo

$$\mu_{R^c}(x_k, x_l) = \min_{1 \leq y \leq v} \mu_{R_{e_y}}(x_k, x_l) \quad (33)$$

o operador máximo

$$\mu_{R^c}(x_k, x_l) = \max_{1 \leq y \leq v} \mu_{R_{e_y}}(x_k, x_l) \quad (34)$$

o operador de média aritmética ponderada (WAM)

$$\mu_{R^c}(x_k, x_l) = \sum_{y=1}^v \mu_{R_{e_y}}(x_k, x_l), \sum_{y=1}^v w_{e_y} = 1 \quad (35)$$

e o operador OWA

$$\mu_{R^c}(x_k, x_l) = \sum_{y=1}^v w_y b_{y_y} \quad (36)$$

onde b_y é o y th maior valor entre $\mu_{R_1}(x_k, x_l), \dots, \mu_{R_v}(x_k, x_l)$, e o conjunto de pesos $(w_1, w_2, \dots, w_v)$ é determinado pelo quantificador linguístico, como “a maioria”, “quase todos”, “muito mais da metade” etc. O conjunto de pesos deve satisfazer as condições $w_y \in [0,1]$ e $\sum w_y = 1$.

As correlações (33)-(36) correspondem à agregação por um critério.

Uma questão importante na escolha do operador é o conjunto de requisitos impostos pelo grupo, tendo em conta as expectativas de cada especialista. Em particular, a utilização do operador mínimo proporciona uma abordagem completamente não compensatória à tomada de decisão multicritério, no sentido de que o baixo nível de satisfação de alguns especialistas não pode ser compensado pelo elevado nível de satisfação de outros especialistas. Por outro lado, a utilização do operador máximo permite construir uma abordagem extremamente compensatória, no sentido de que é suficiente o elevado nível de satisfação de qualquer especialista. O operador de agregação OWA produz um resultado de acordo com o ajuste dos seus pesos que independem da fonte de informação. Dependendo dos pesos atribuídos, o operador OWA pode ser reduzido tanto ao operador mínimo quanto ao operador máximo (Parreiras; Ekel; Bernandes Jr., 2012a).

Como no trabalho em grupo podem ocorrer divergências entre os membros, uma matriz coletiva inicial pode indicar uma solução não aceitável para o grupo. Considerando isto, diferentes esquemas de consenso foram desenvolvidos para alcançar um nível satisfatório de concordância entre os especialistas. Esses esquemas permitem aumentar a racionalidade da solução coletiva, bem como a eficiência da discussão entre especialistas (Chen *et al.*, 2012; Chen; Tsai, 2013; Parreiras; Ekel; Bernandes Jr., 2012a). Os esquemas de consenso propostos são suportados por índices de consenso e coerência, proporcionando ao moderador a oportunidade de intervir eficazmente no processo de discussão, utilizando as capacidades de cada membro do grupo no trabalho em equipe.

O índice de concordância serve para quantificar o nível de semelhança ou correspondência entre qualquer par de opiniões. Assim, no âmbito de um esquema de consenso, o índice de concordância é utilizado para identificar o especialista menos concordante com o resto do grupo em cada ciclo do processo de discussão. Este especialista é convidado a rever a sua opinião ou explicá-la ao grupo. O índice de

consenso quantifica, na faixa de 0 a 1, até que ponto um grupo de especialistas está da unanimidade perfeita.

Na literatura é possível encontrar tentativas de evitar alguns aspectos negativos relacionados ao alcance do consenso: inconsistência nas informações apresentadas, falta de conhecimento especializado e experiência para julgar o conjunto completo de alternativas e/ou critérios, falta de cooperação do grupo, mudanças sucessivas nas preferências dos especialistas etc., que possam surgir no processo de tomada de decisão.

Ekel *et al.* (2009) desenvolveram um esquema de consenso supervisionado para evitar a situação em que o mesmo especialista é convidado diversas vezes para revisar sua opinião. Em Bernardes *et al.* (2008), utiliza-se a ponderação dos critérios através de um algoritmo de otimização caso não seja possível distinguir a ordem das alternativas utilizando métodos tradicionais. Parreiras *et al.* (2010) realizaram uma comparação do desempenho dos esquemas de consenso utilizando pesos ajustados pelo moderador e um procedimento de otimização que maximiza o índice de consenso.

Utilizando a agregação das preferências individuais por critério, é possível medir o nível de concordância entre o y -ésimo especialista e o grupo, calculando a semelhança (Alonso *et al.*, 2007) entre as preferências fornecidas pelo y -ésimo especialista e a preferência coletiva para cada par de alternativas $((x_k, x_l), k, l = 1, 2, \dots, n)$, como

$$S_y(x_k, x_l) = 1 - \left| \left(R_y(x_k, x_l) - R_G(x_k, x_l) \right) \right| \quad (37)$$

sendo R_y a relação de preferência *fuzzy* fornecida pelo y -ésimo ($y = 1, \dots, v$) especialista e R_G a relação de preferência *fuzzy* coletiva.

O nível de concordância da alternativa pode ser calculado para o y -ésimo especialista utilizando a seguinte expressão:

$$Sa^y(x_k) = \sum_{l=1; l \neq k}^n \frac{S_y(x_k, x_l) + S_y(x_l, x_k)}{2(n-1)}, k = 1, \dots, n \quad (38)$$

A aplicação de (38) permite identificar o especialista que apresenta menor concordância com o grupo e a alternativa que corresponde a essa discordância.

O nível médio de concordância entre as preferências do y -ésimo especialista e a preferência do grupo, independentemente da alternativa, pode ser calculado da seguinte forma:

$$Sm^y = \sum_{k=1}^n \frac{Sa^y(x_k)}{n}, y = 1, \dots, v \quad (39)$$

Ao agregar os resultados que expressam o nível de concordância entre o y -ésimo especialista e o grupo, definido por (38), o nível de consenso do grupo sobre a alternativa pode ser obtido a partir da seguinte expressão:

$$Ca(x_k) = \sum_{k=1}^n \frac{Sa^y(x_k)}{v}, k, l = 1, \dots, n \quad (40)$$

Finalmente, o nível de consenso do grupo pode ser calculado como

$$C_G = \sum_{k=1}^n \frac{Ca(x_k)}{n} \quad (41)$$

Esse índice indica o quão longe um grupo está da unanimidade perfeita. Assim, se o valor obtido pela utilização de (41) for maior que o nível desejado, a solução do grupo é considerada aceitável.

Tendo em conta o exposto, o esquema de construção de consenso, apresentado a seguir, permite evitar alguns pontos negativos das abordagens tradicionais acima indicadas. Em particular, esse esquema requer a execução das seguintes etapas principais:

1. Os especialistas são convidados a expressar as suas opiniões sobre todas as alternativas, considerando um critério de cada vez, através de um formato de preferência mais confortável. Se um especialista não se sentir confortável em julgar por algum critério, poderá não participar da avaliação correspondente.
2. São estabelecidos os coeficientes de importância dos especialistas.
3. As preferências obtidas são reduzidas às relações de preferência *fuzzy* não recíprocas, utilizando as funções de transformação correspondentes.
4. Obtém-se uma opinião coletiva por critério, utilizando o operador de agregação que satisfaz de forma convincente as preferências do grupo. Por exemplo, pode ser utilizado o operador de média aritmética ponderada pelo critério.
5. O índice de concordância é calculado para ordenar os especialistas do mais discordante para o menos discordante, e o índice de consenso é calculado para avaliar se o nível de consenso desejado é alcançado.
6. Se o nível de consenso for insatisfatório, o especialista mais discordante é identificado para alterar ou justificar as suas preferências. No entanto, se o mesmo especialista for identificado como o mais discordante em iterações sucessivas, o moderador deverá decidir se convida novamente o mesmo especialista ou realiza o convite do próximo especialista mais discordante.
7. Se o número de iterações não atingir um nível aceitável, o processo retorna para a etapa 2. Caso contrário, o processo termina.

Após obter uma opinião coletiva com o nível de consenso aceitável, as matrizes da preferência *fuzzy* individual devem ser utilizadas no Passo 2 da abordagem de (Ramalho *et al.*, 2019) para reduzi-las às relações de preferência multiplicativas.

5. Exemplo de aplicação

Como exemplo de aplicação que ilustra os resultados discutidos acima, consideremos um problema de alocação de recursos financeiros no planejamento da expansão da produção empresarial.

Três modelos de alocação de recursos ou sua escassez são considerados em (Ramalho *et al.*, 2019). Em particular, o primeiro modelo relacionado à alocação de recursos entre soluções, alternativas, projetos etc. (alternativas de expansão, ações estratégicas, projetos de inovação, projetos de novos negócios etc.; para simplificar, consumidores) consiste no seguinte.

Recebemos as demandas $D_i, i = 1, 2, \dots, n$ dos consumidores e um recurso total disponível $R < \sum D_i$. Então, o problema apresenta a seguinte estrutura:

$$F_p(X) \rightarrow \max_{x \in L} \text{ ou } \min_{x \in L}, p = 1, 2, \dots, q \quad (42)$$

$$0 \leq x_i \leq D_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (43)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = R \quad (44)$$

Em (42)-(44), $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ são variáveis que correspondem aos volumes de recursos procurados destinados ao i -ésimo consumidor.

Aplicando o modelo (42)-(44), é necessário distribuir $R = R\$3.000.000,00$ entre as alternativas de planejamento da expansão da produção empresarial: aumentar o nível de produção de cinco tipos de produtos.

$$\sum_{i=1}^5 x_i = 3.000.000,00 \quad (45)$$

Os dados iniciais do problema apresentados na Tabela 6 permitem construir as seguintes restrições:

$$0 \leq x_1 \leq 850,00 \quad (46)$$

$$0 \leq x_2 \leq 220,00 \quad (47)$$

$$0 \leq x_3 \leq 1.300,00 \quad (48)$$

$$0 \leq x_4 \leq 1.615,00 \quad (49)$$

$$0 \leq x_5 \leq 700,00 \quad (50)$$

Tabela 6. Projetos de planejamento de expansão

Projeto (i)	Máximo Demanda [kR\$]	Lucro [kR\$]	Exportar [kR\$]
1	850,00	20,00 a 30,00	55,00 a 70,00
2	220,00	65,00 a 75,00	25,00 a 45,00
3	1300,00	55,00 a 65,00	40,00 a 60,00
4	1615,00	90,00 a 100,00	50,00 a 80,00
5	700,00	40,00 a 50,00	70,00 a 90,00

Considerando o modo de formulação de objetivos para alocação ou escassez de recursos discutidos em (Ekel; Pedrycz; Pereira Jr., 2019; Ramalho *et al.*, 2019), os seguintes objetivos são levados em conta:

- priorizar projetos com a maior nível de inovação;
- priorizar projetos com a maior nível de lucro para cada investido R\$100.000,00;
- priorizar de projetos com a maior nível de produtos para exportação;

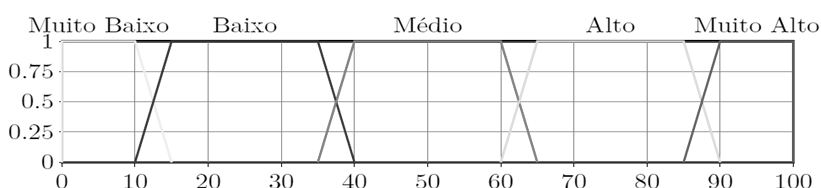
- priorizar projetos com o mais baixo nível de ambiente risco.

O alcance desses objetivos é baseado na maximização ou minimização, na maioria dos casos, das funções objetivo (Ekel; Pedrycz; Pereira Jr., 2019; Ramalho *et al.*, 2019). Em especial, o alcance dos três primeiros objetivos está associado à maximização das funções objetivo correspondentes. Ao mesmo tempo, o alcance do quarto objetivo é associado à minimização da função objetivo correspondente.

As funções objetivo relacionadas para o segundo e terceiros objetivos podem ser construídas com base dados da Tabela 6. As funções objetivo relacionadas ao primeiro e quarto objetivos devem ser construídas com base de informações qualitativas fornecidas pelos especialistas. Em particular, o grupo de cinco especialistas participou desse processo.

Utilizando a abordagem da AIC discutida acima, especialistas foram convidados a avaliar todas as alternativas. Esse processo foi iniciado a partir da consideração do critério “nível de inovação”. O moderador aconselhou os especialistas a utilizarem os formatos de representação de preferências que se sentissem confortáveis. Os especialistas e_1 e e_5 escolheram expressar suas preferências usando relações de preferências multiplicativas, os especialistas e_2 e e_4 optaram por utilizar a relação de preferência *fuzzy* não recíproca, construída aplicando (22) e (23) às estimativas da Figura 1, sendo $e_2 = \{\text{Pequeno, Médio, Grande, Grande, Pequeno}\}$ e $e_4 = \{\text{Muito Grande, Grande, Médio, Médio, Muito Grande}\}$. O especialista e_3 decidiu por aplicar a ordenação das alternativas.

Figura 1: Conjunto de termos linguísticos referente ao desempenho de cada alternativa



$$\begin{aligned}
 MR_1 &= \begin{bmatrix} 1,00 & 0,11 & 0,33 & 0,33 & 1,00 \\ 9,00 & 1,00 & 6,00 & 6,00 & 9,00 \\ 3,00 & 0,17 & 1,00 & 1,00 & 3,00 \\ 3,00 & 0,17 & 1,00 & 1,00 & 3,00 \\ 1,00 & 0,11 & 0,33 & 0,33 & 1,00 \end{bmatrix} \\
 NR_2 &= \begin{bmatrix} 1,00 & 0,50 & 0,00 & 0,00 & 1,00 \\ 1,00 & 1,00 & 0,50 & 0,50 & 1,00 \\ 1,00 & 1,00 & 1,00 & 1,00 & 1,00 \\ 1,00 & 1,00 & 1,00 & 1,00 & 1,00 \\ 1,00 & 0,50 & 0,00 & 0,00 & 1,00 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$OA_3 = [3 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad 3]$$

$$\begin{aligned}
 NR_4 &= \begin{bmatrix} 1,00 & 1,00 & 1,00 & 1,00 & 1,00 \\ 0,50 & 1,00 & 1,00 & 1,00 & 0,50 \\ 0,00 & 0,50 & 1,00 & 1,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,50 & 1,00 & 1,00 & 0,00 \\ 1,00 & 1,00 & 1,00 & 1,00 & 1,00 \end{bmatrix} \\
 MR_5 &= \begin{bmatrix} 1,00 & 0,33 & 6,00 & 6,00 & 1,00 \\ 3,00 & 1,00 & 9,00 & 9,00 & 3,00 \\ 0,17 & 0,11 & 1,00 & 1,00 & 0,17 \\ 0,17 & 0,11 & 1,00 & 1,00 & 0,17 \\ 1,00 & 0,33 & 6,00 & 6,00 & 1,00 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Nesse ponto, o moderador decidiu diferenciar os níveis de influência dos especialistas atribuindo coeficiente de importância, resultando no seguinte vetor:

$$w = [0,24 \quad 0,18 \quad 0,28 \quad 0,12 \quad 0,18]$$

As preferências refletidas por MR_1 , OA_3 , e MR_5 , aplicando (27) e (28), foram transformadas em relações de preferência *fuzzy* não recíprocas. Todas as cinco relações de preferências *fuzzy* não recíprocas foram agregadas usando o operador de média ponderada (35) e o vetor de peso fornecido acima. O resultado correspondente é uma matriz de preferência coletiva.

$$R_G = \begin{bmatrix} 1,00 & 0,41 & 0,49 & 0,49 & 1,00 \\ 0,94 & 1,00 & 0,74 & 0,74 & 0,94 \\ 0,73 & 0,56 & 1,00 & 1,00 & 0,73 \\ 0,73 & 0,56 & 1,00 & 1,00 & 0,73 \\ 1,00 & 0,41 & 0,49 & 0,49 & 1,00 \end{bmatrix}$$

Os índices que regulam o fluxo do processo de construção de consenso são apresentados na Tabela 7. Esses índices correspondem ao nível de concordância por alternativa para cada um dos especialistas, calculado através de (37) e (38), nível médio de concordância, calculado através de (39), e o nível de consenso por uma aplicação alternativa, calculado aplicando (40). Finalmente, o atual nível de consenso do grupo é obtido com base em (41) é $C_G = 0,74$.

Tabela 7. Nível de concordância e consenso por alternativa e especialista na primeira iteração

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$Sa^1(x_k)$	0,87	0,72	0,85	0,85	0,87
$Sa^2(x_k)$	0,79	0,79	0,73	0,73	0,79
$Sa^3(x_k)$	0,86	0,78	0,77	0,77	0,86
$Sa^4(x_k)$	0,56	0,66	0,65	0,65	0,56
$Sa^5(x_k)$	0,72	0,75	0,63	0,63	0,72
$Ca(x_k)$	0,76	0,74	0,73	0,73	0,76

O moderador determinou que o número máximo de iterações seja igual a 7 e que o nível mínimo de consenso do grupo seja igual a 0,85. Portanto, o especialista menos concordante é convidado a rever a sua opinião. Analisando os dados da Tabela 7, o moderador convidou e_4 para revisar suas preferências associadas a x_1 e x_5 . Durante a nova

rodada de discussão, e_4 reavaliou suas preferências refletidas pela seguinte relação de preferência *fuzzy* não recíproca:

$$NR_4 = \begin{bmatrix} 1,00 & 0,00 & 0,50 & 0,50 & 1,00 \\ 1,00 & 1,00 & 1,00 & 1,00 & 1,00 \\ 1,00 & 0,50 & 1,00 & 1,00 & 1,00 \\ 1,00 & 0,50 & 1,00 & 1,00 & 1,00 \\ 1,00 & 0,00 & 0,50 & 0,50 & 1,00 \end{bmatrix}$$

Os níveis de concordância e consenso por alternativa para a segunda iteração são mostrados na Tabela 8. No entanto, o nível de consenso atual de $C_G = 0,81$ ainda é inaceitável.

Tabela 8. Nível de concordância e consenso por alternativa e especialista na segunda iteração

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$Sa^1(x_k)$	0,91	0,77	0,87	0,86	0,91
$Sa^2(x_k)$	0,82	0,78	0,77	0,77	0,83
$Sa^3(x_k)$	0,91	0,78	0,82	0,82	0,91
$Sa^4(x_k)$	0,91	0,85	0,90	0,90	0,91
$Sa^5(x_k)$	0,66	0,74	0,59	0,59	0,66
$Ca(x_k)$	0,84	0,78	0,79	0,79	0,84

Analisando os dados da Tabela 8, o moderador convida e_5 a revisar suas preferências associadas a x_3 e x_4 . Durante a nova rodada de discussão, e_5 reavaliou suas preferências refletidas pela seguinte relação de preferência multiplicativa:

$$MR_5 = \begin{bmatrix} 1,00 & 0,17 & 0,33 & 0,33 & 1,00 \\ 6,00 & 1,00 & 3,00 & 3,00 & 6,00 \\ 3,00 & 0,33 & 1,00 & 1,00 & 3,00 \\ 3,00 & 0,33 & 1,00 & 1,00 & 3,00 \\ 1,00 & 0,17 & 0,33 & 0,33 & 1,00 \end{bmatrix}$$

Os níveis de concordância e consenso por alternativa para a terceira iteração são mostrados na Tabela 9. O nível de consenso atual é $C_G = 0,89$, o que é aceitável. Assim, o processo de discussão está concluído.

Tabela 9. Nível de concordância e consenso por alternativa e especialista na terceira iteração

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$Sa^1(x_k)$	0,93	0,76	0,87	0,87	0,93
$Sa^2(x_k)$	0,88	0,79	0,84	0,84	0,88
$Sa^3(x_k)$	0,96	0,79	0,89	0,89	0,96
$Sa^4(x_k)$	0,93	0,84	0,91	0,91	0,93
$Sa^5(x_k)$	0,95	0,88	0,91	0,91	0,95
$Ca(x_k)$	0,93	0,81	0,88	0,88	0,93

Aplicando (24)-(26), é possível transformar todas as preferências *fuzzy* individuais não recíprocas em relações de preferência multiplicativas (MR_1 pode ser usada diretamente em sua forma inicial). Agora, o método AHP pode ser aplicado para obter os seguintes vetores:

- $e_1 = [0,052 \quad 0,626 \quad 0,135 \quad 0,135 \quad 0,052]$
- $e_2 = [0,043 \quad 0,130 \quad 0,391 \quad 0,391 \quad 0,043]$
- $e_3 = [0,096 \quad 0,229 \quad 0,289 \quad 0,289 \quad 0,096]$
- $e_4 = [0,059 \quad 0,529 \quad 0,176 \quad 0,176 \quad 0,059]$
- $e_5 = [0,068 \quad 0,485 \quad 0,189 \quad 0,189 \quad 0,068]$

Aplicando a agregação OWA (36) com $w_1 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$ e $w_2 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$ aos vetores obtidos, é possível obter limites, que correspondem ao pessimismo e ao otimismo, respetivamente. Esses limites permitem construir combinações representativas de dados iniciais, estados da natureza ou cenários (Ekel; Pedrycz; Pereira Jr., 2019; Ramalho *et al.*, 2019).

- $B_{min} = [0,043 \quad 0,130 \quad 0,135 \quad 0,135 \quad 0,043]$,
- $B_{max} = [0,096 \quad 0,626 \quad 0,391 \quad 0,391 \quad 0,096]$

Agora, consideremos o critério “risco ambiental”. No processo de tomada de decisão é utilizada a técnica de derivação dos pesos iniciais dos DMs proposta em (Koksalmis; Koksalmis; Kabak, 2019). Essa técnica combina a concepção subjetiva do moderador e a concepção objetiva de concordância do grupo com base nas opiniões expressas individualmente. Como a técnica requer a apresentação de preferências na forma de relações de preferência multiplicativas, consideremos que os DMs optaram por representar suas preferências nesse formato, por abreviatura.

O especialista e_1 não estava preparado para expressar a sua opinião e recusou-se a fazê-la. As preferências individuais de outros especialistas são expressas abaixo:

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1,00 & 1,00 & 3,00 & 5,00 & 3,00 \\ 1,00 & 1,00 & 3,00 & 5,00 & 3,00 \\ 0,33 & 0,33 & 1,00 & 3,00 & 1,00 \\ 0,20 & 0,20 & 0,33 & 1,00 & 0,33 \\ 0,33 & 0,33 & 1,00 & 3,00 & 1,00 \end{bmatrix} \quad R_3 = \begin{bmatrix} 1,00 & 5,00 & 3,00 & 3,00 & 5,00 \\ 0,20 & 1,00 & 0,33 & 0,33 & 1,00 \\ 0,33 & 3,00 & 1,00 & 1,00 & 3,00 \\ 0,33 & 3,00 & 1,00 & 1,00 & 3,00 \\ 0,20 & 1,00 & 0,33 & 0,33 & 1,00 \end{bmatrix}$$

$$R_4 = \begin{bmatrix} 1,00 & 3,00 & 3,00 & 1,00 & 5,00 \\ 0,33 & 1,00 & 1,00 & 0,33 & 3,00 \\ 0,33 & 1,00 & 1,00 & 0,33 & 3,00 \\ 1,00 & 3,00 & 3,00 & 1,00 & 5,00 \\ 0,20 & 0,33 & 0,33 & 0,20 & 1,00 \end{bmatrix} \quad R_5 = \begin{bmatrix} 1,00 & 1,00 & 0,33 & 1,00 & 3,00 \\ 1,00 & 1,00 & 0,33 & 1,00 & 3,00 \\ 3,00 & 3,00 & 1,00 & 3,00 & 5,00 \\ 1,00 & 1,00 & 0,33 & 1,00 & 3,00 \\ 0,33 & 0,33 & 0,20 & 0,33 & 1,00 \end{bmatrix}$$

Os resultados da aplicação da técnica de Koksalmis, Koksalmis e Kabak (2019) são apresentados na Tabela 10.

Tabela 10. Coeficientes de importância dos DMs

	e_1	e_2	e_3	e_4
Pesos objetivos(w_o^y)	0,11	0,31	0,31	0,27
Pesos subjetivos(w_s^y)	0,25	0,25	0,25	0,25
Pesos combinados(w_c^y)	0,18	0,28	0,28	0,26

As preferências refletidas acima, aplicando (27) e (28), foram transformadas em relações de preferência *fuzzy* não recíprocas. Todas as quatro relações de preferências *fuzzy* não recíprocas foram agregadas usando o operador de média ponderada (35) e o vetor de peso obtido. O resultado correspondente é uma matriz de preferência coletiva.

$$R_G = \begin{bmatrix} 1,00 & 1,00 & 0,87 & 1,00 & 1,00 \\ 0,65 & 1,00 & 0,73 & 0,72 & 1,00 \\ 0,63 & 0,91 & 1,00 & 0,86 & 1,00 \\ 0,73 & 0,87 & 0,78 & 1,00 & 0,91 \\ 0,37 & 0,64 & 0,53 & 0,53 & 1,00 \end{bmatrix}$$

Os índices que regulam o fluxo do processo de construção de consenso são apresentados na Tabela 11. Esses índices correspondem ao nível de concordância por alternativa para cada um dos especialistas, calculado através de (37) e (38), nível médio de concordância, calculado através de (39), e o nível de consenso por uma aplicação alternativa, calculado aplicando (40). Finalmente, o atual nível de consenso do grupo é obtido por (41) é $C_G = 0,83$.

Tabela 11. Nível de concordância e consenso por alternativa e especialista na primeira iteração

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$Sa^2(x_k)$	0,85	0,74	0,77	0,67	0,80
$Sa^3(x_k)$	0,88	0,82	0,88	0,87	0,92
$Sa^4(x_k)$	0,90	0,87	0,85	0,81	0,92
$Sa^5(x_k)$	0,81	0,85	0,78	0,85	0,92
$Ca(x_k)$	0,86	0,82	0,82	0,80	0,89

O moderador determinou que o máximo número de iterações é igual a 7, e que o mínimo consenso nível do grupo é igual a 0,85. Portanto, o especialista menos concordante é convidado a rever a sua opinião. Analisando os dados da Tabela 11, o moderador convidou e_2 rever as preferências associadas com x_4 . Durante a nova rodada de discussão, e_2 reavaliou suas preferências:

$$MR_2 = \begin{bmatrix} 1,00 & 1,00 & 1,00 & 3,00 & 3,00 \\ 1,00 & 1,00 & 1,00 & 3,00 & 3,00 \\ 1,00 & 1,00 & 1,00 & 3,00 & 1,00 \\ 0,33 & 0,33 & 0,33 & 1,00 & 1,00 \\ 0,33 & 0,33 & 1,00 & 1,00 & 1,00 \end{bmatrix}$$

Os níveis de concordância e consenso por alternativa para a terceira iteração são mostrados na Tabela 12. O atual nível de consenso é $C_G = 0,86$, o qual é aceitável. Por isso, o processo de discussão é concluído.

Tabela 12. Nível de concordância e consenso por alternativa e especialista na segunda iteração

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$Sa^2(x_k)$	0,86	0,82	0,80	0,77	0,85
$Sa^3(x_k)$	0,86	0,84	0,88	0,88	0,94
$Sa^4(x_k)$	0,90	0,89	0,85	0,83	0,93
$Sa^5(x_k)$	0,83	0,86	0,80	0,87	0,93
$Ca(x_k)$	0,86	0,85	0,83	0,84	0,91

Visto que as preferências já estão apresentadas na forma de relações de preferências multiplicativa, o AHP método pode ser aplicado para obter os seguintes vetores:

- $e_2 = [0,278 \quad 0,278 \quad 0,230 \quad 0,093 \quad 0,122]$,
- $e_3 = [0,466 \quad 0,073 \quad 0,194 \quad 0,194 \quad 0,073]$
- $e_4 = [0,343 \quad 0,129 \quad 0,129 \quad 0,343 \quad 0,055]$
- $e_5 = [0,165 \quad 0,165 \quad 0,444 \quad 0,165 \quad 0,063]$

Aplicando a agregação OWA (36) com $w_1 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$ e $w_2 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$ aos vetores obtidos, é possível obter limites, que correspondem ao pessimismo e ao otimismo, respetivamente. Esses limites permitem construir combinações representativas de dados iniciais, estados da natureza ou cenários (Ekel; Pedrycz; Pereira Jr., 2019; Ramalho *et al.*, 2019).

$$B_{min} = [0,165 \quad 0,073 \quad 0,111 \quad 0,111 \quad 0,055], \quad B_{max} \\ = [0,466 \quad 0,333 \quad 0,444 \quad 0,343 \quad 0,111]$$

O esquema de consenso proposto no presente trabalho, conforme indicado acima, permite reduzir o nível de incerteza dos coeficientes das funções objetivo. Isso é confirmado pelos dados de Tabela 13, apresentando as funções objetivo construídas para “nível de inovação” e “risco ambiental”, antes e depois da construção de consenso, respectivamente.

Tabela 13. Funções objetivo considerando “nível de inovação” e “risco ambiental”

	Nível de Inovação	Risco Ambiental
Sem consenso	$F(X)=[0,043,0,391]x_1+[0,130,0,626]x_2+[0,135,0,391]x_3+[0,135,0,391]x_4+[0,043,0,096]x_5$	$F(X)=[0,165,0,466]x_1+[0,073,0,343]x_2+[0,129,0,444]x_3+[0,055,0,343]x_4+[0,055,0,122]x_5$
o		
Consensus	$F(X)=[0,043,0,096]x_1+[0,130,0,626]x_2+[0,135,0,391]x_3+[0,135,0,391]x_4+[0,043,0,096]x_5$	$F(X)=[0,165,0,466]x_1+[0,073,0,278]x_2+[0,129,0,444]x_3+[0,093,0,343]x_4+[0,055,0,122]x_5$
o		

É possível observar que o intervalo de limites dos coeficientes das funções objetivo diminui significativamente, especialmente quando as opiniões do grupo membros são altamente discordantes.

Tendo em conta os objetivos de alocação, indicados acima, as funções objetivo da Tabela 13, bem como os dados de Tabela 6, é possível formar o seguinte modelo de tomada de decisão multiobjetivo com intervalo de coeficientes nas funções objetivo:

- $F_1(X) = [0,043,0,096]x_1 + [0,130,0,626]x_2 + [0,135,0,391]x_3 + [0,135,0,391]x_4 + [0,043,0,096]x_5 \rightarrow \max$
- $F_2(X) = [20,00,30,00]x_1 + [65,00,75,00]x_2 + [55,00,65,00]x_3 + [90,00,100,00]x_4 + [40,00,50,00]x_5 \rightarrow \max$
- $F_3(X) = [55,00,70,00]x_1 + [25,00,45,00]x_2 + [40,00,60,00]x_3 + [50,00,80,00]x_4 + [70,00,90,00]x_5 \rightarrow \max$
- $F_4(X) = [0,165,0,466]x_1 + [0,073,0,278]x_2 + [0,129,0,444]x_3 + [0,093,0,343]x_4 + [0,055,0,122]x_5 \rightarrow \min$

A execução da etapa (b) do esquema geral de tomada de decisão multicritério em condições de incerteza (Seção 2) gera (de acordo com o número de combinações representativas de dados iniciais, estados de natureza ou de cenários $S = 7$) os seguintes sete conjuntos de funções objetivo:

- $F_{1,1}(X) = 0,0695x_1 + 0,3780x_2 + 0,2630x_3 + 0,2630x_4 + 0,0695x_5 \rightarrow \max$
- $F_{1,2}(X) = 25,000x_1 + 70,000x_2 + 60,000x_3 + 75,000x_4 + 45000x_5 \rightarrow \max$
- $F_{1,3}(X) = 62,500x_1 + 35,000x_2 + 50,000x_3 + 65,000x_4 + 80,000x_5 \rightarrow \max$
- $F_{1,4}(X) = 0,3155x_1 + 0,1755x_2 + 0,2865x_3 + 0,2180x_4 + 0,0885x_5 \rightarrow \min$
- $F_{2,1}(X) = 0,0828x_1 + 0,2540x_2 + 0,1990x_3 + 0,1990x_4 + 0,0828x_5 \rightarrow \max$
- $F_{2,2}(X) = 27,500x_1 + 67,500x_2 + 62,500x_3 + 67,500x_4 + 47,500x_5 \rightarrow \max$
- $F_{2,3}(X) = 66,250x_1 + 40,000x_2 + 45,000x_3 + 57,500x_4 + 85,000x_5 \rightarrow \max$
- $F_{2,4}(X) = 0,2403x_1 + 0,2268x_2 + 0,2077x_3 + 0,2805x_4 + 0,0718x_5 \rightarrow \min$

- $F_{3,1}(X) = 0,0562x_1 + 0,5020x_2 + 0,3270x_3 + 0,3270x_4 + 0,0562x_5 \rightarrow \max$
- $F_{3,2}(X) = 22,500x_1 + 72,500x_2 + 57,500x_3 + 82,500x_4 + 42,500x_5 \rightarrow \max$
- $F_{3,3}(X) = 58,750x_1 + 30,000x_2 + 55,000x_3 + 72,500x_4 + 75,000x_5 \rightarrow \max$
- $F_{3,4}(X) = 0,3908x_1 + 0,1242x_2 + 0,3653x_3 + 0,1555x_4 + 0,1053x_5 \rightarrow \min$
- $F_{4,1}(X) = 0,0629x_1 + 0,3160x_2 + 0,2950x_3 + 0,3590x_4 + 0,0629x_5 \rightarrow \max$
- $F_{4,2}(X) = 21,250x_1 + 68,750x_2 + 63,750x_3 + 63,750x_4 + 46,250x_5 \rightarrow \max$
- $F_{4,3}(X) = 68,125x_1 + 32,500x_2 + 47,500x_3 + 68,750x_4 + 77,500x_5 \rightarrow \max$
- $F_{4,4}(X) = 0,4284x_1 + 0,1499x_2 + 0,4046x_3 + 0,3117x_4 + 0,0634x_5 \rightarrow \min$
- $F_{5,1}(X) = 0,0894x_1 + 0,5640x_2 + 0,1670x_3 + 0,2310x_4 + 0,0894x_5 \rightarrow \max$
- $F_{5,2}(X) = 26,250x_1 + 73,750x_2 + 58,750x_3 + 78,750x_4 + 41,250x_5 \rightarrow \max$
- $F_{5,3}(X) = 60,625x_1 + 42,500x_2 + 57,500x_3 + 53,750x_4 + 87,500x_5 \rightarrow \max$
- $F_{5,4}(X) = 0,2779x_1 + 0,2524x_2 + 0,2471x_3 + 0,1867x_4 + 0,0969x_5 \rightarrow \min$
- $F_{6,1}(X) = 0,0761x_1 + 0,1920x_2 + 0,3590x_3 + 0,2950x_4 + 0,0761x_5 \rightarrow \max$
- $F_{6,2}(X) = 28,750x_1 + 66,250x_2 + 56,250x_3 + 86,250x_4 + 43,750x_5 \rightarrow \max$
- $F_{6,3}(X) = 56,875x_1 + 37,500x_2 + 42,500x_3 + 76,250x_4 + 82,500x_5 \rightarrow \max$
- $F_{6,4}(X) = 0,3531x_1 + 0,2011x_2 + 0,3259x_3 + 0,1242x_4 + 0,0801x_5 \rightarrow \min$
- $F_{7,1}(X) = 0,0496x_1 + 0,4400x_2 + 0,2310x_3 + 0,1670x_4 + 0,0496x_5 \rightarrow \max$
- $F_{7,2}(X) = 23,750x_1 + 71,250x_2 + 61,250x_3 + 71,250x_4 + 48,750x_5 \rightarrow \max$
- $F_{7,3}(X) = 64,375x_1 + 27,500x_2 + 52,500x_3 + 61,250x_4 + 72,500x_5 \rightarrow \max$
- $F_{7,4}(X) = 0,2026x_1 + 0,0986x_2 + 0,1684x_3 + 0,2492x_4 + 0,1136x_5 \rightarrow \min$

A execução da etapa (c) do esquema geral de tomada de decisão multicritério em condições de incerteza (Seção 2) permitiu obter as soluções para todos os problemas multiobjetivos ($S = 7$). Essas soluções são dadas em Tabela 14.

Tabela 14. Alternativas para solução de 7 cenários

s	X_1	X_2	X_3	X_4	$X_5 r$
1	473,08	0,12	1299,76	850,00	377,04
2	120,00	220,00	614,80	1480,00	685,08
3	0,00	220,00	1164,88	1615,00	120,00
4	684,76	240,00	0,00	1615,00	700,00
5	0,00	220,00	465,04	1615,00	699,96
6	120,00	85,00	1299,88	16150,00	0,00
7	629,80	219,96	240,00	1450,00	700,00

As soluções apresentadas na Tabela 14, de acordo com a etapa (d) do esquema geral de tomada de decisão multicritério em condições de incerteza (Seção 2), serviram para a construção das matrizes de *payoff* para todas as funções objetivo ($q = 4$). Essas matrizes são apresentadas nas Tabelas 15-18, que são complementadas pelos correspondentes critérios de escolha (11)-(14). O cálculo de $F_p^H(X_k)$, de acordo com (11), foi executado com $\alpha = 0,75$.

Tabela 15. Matriz de *payoff* e estimativas de critérios de escolha para $F_1(X_k)$

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	$F^W(X_k)$	$F^L(X_k)$	$F_{(X_k)}^S$	$F^H(X_k)$
X_1	624,5	498,2	750,8	742,0	489,4	782,0					
	2	2	0	9	8	8	484,41	782,08	624,52	268,66	707,66
X_2	681,7	529,4	833,9	825,3	629,8	751,7					
	1	8	5	1	9	0	519,96	833,95	681,71	207,71	755,45
X_3	814,2	609,0	1019	992,9	691,6	936,8					
	8	9	47	5	9	7	635,60	1019,4	814,28	22,55	916,87
X_4	521,0	436,1	606,0	666,9	496,9	581,8					
	8	0	5	6	9	5	338,49	666,96	521,08	413,42	584,85
X_5	678,8	527,7	829,9	830,5	637,3	738,8					
	6	6	5	2	8	8	508,65	830,52	678,86	220,53	750,05
X_6	798,7	601,6	995,8	990,1	638,1	959,4					
	5	6	4	2	0	1	607,38	995,84	798,75	53,60	897,30
X_7	556,9	454,5	659,3	673,7	577,9	571,2					
	8	8	8	7	3	7	404,95	673,77	556,98	388,14	606,57
$\min_{1 \leq k \leq 7} F_p(X_k)$								666,96	521,08	22,55	584,85
$\max_{1 \leq k \leq 7} F_p(X_k)$								1019	814,2	413,4	916,8
								4	8	2	8

Tabela 16. Matriz de *payoff* e estimativas de critérios de escolha para $F_2(X_k)$

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	$F^W(X_k)$	$F^L(X_k)$	$F^S(X_k)$	$F^H(X_k)$
X_1	18753	19503	18003	19429	18402	18077	19104	19503	18753	54576	19128
	7,80	7,20	8,40	6,50	8,50	8,50	7,70	7,20	7,80	40	7,50
X_2	22371	23011	21731	23215	21935	21418	22918	23215	22371	16716	22766
	9,60	9,60	9,60	6,00	7,20	3,20	2,00	6,00	9,60	90	2,80
X_3	23872	24512	23232	24887	23607	22747	24247	24887	23872	0,00	24352
	3,20	3,20	3,20	2,90	2,90	3,50	3,50	2,90	3,20		3,05
X_4	20206	20955	19456	20642	19827	19769	20584	20955	20206	42449	20581
	0,80	9,60	2,00	3,90	3,90	6,50	8,90	9,60	0,80	00	0,20
X_5	22822	23462	22182	23662	22382	21872	23372	23662	22822	12247	23215
	5,60	5,60	5,60	5,70	5,70	5,50	5,50	5,70	5,60	20	0,65
X_6	23737	24444	23029	24819	23404	22612	24112	24819	23737	2027,4	24267
	0,80	5,80	5,80	4,90	6,10	1,70	0,50	4,90	0,80	0	6,60
X_7	20040	20680	19400	20408	19758	19563	20433	20680	20040	44789	20360
	6,60	6,80	6,40	3,30	0,90	0,10	2,10	6,80	6,60	60	6,70
$\min_{1 \leq k \leq 7} F_p(X_k)$								19503	18753	0,00	19128
								7	7		7
$\max_{1 \leq k \leq 7} F_p(X_k)$								24887	23872	54576	24352
								2,90	3,20	,40	3,05

Tabela 17. Matriz de *payoff* e estimativas de critérios de escolha para $F_3(X_k)$

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	$F^W(X_k)$	$F^L(X_k)$	$F^S(X_k)$	$F^H(X_k)$
X_1	17997	17075	18918	18162	18210	17806	17809	18918	17997	41779	18457
	2,90	8,95	6,85	9,18	0,28	9,03	3,13	6,85	2,90	45	9,88
X_2	18945	17980	19910	19120	18420	20375	17865	20375	18945	20733	19747
	3,90	5,75	2,05	4,88	2,78	4,93	3,03	4,93	3,90	45	9,45
X_3	17092	15409	18776	17352	16314	18091	16613	18776	17092	43645	17934
	8,60	2,30	4,90	2,35	7,35	1,05	3,65	4,90	8,60	15	6,75
X_4	20378	19773	20982	21193	18958	21984	19375	21984	20378	0,00	21228
	0,90	7,45	4,35	8,33	0,03	8,48	6,78	8,48	0,90		1,36
X_5	19192	18208	20176	19451	18414	20890	18013	20890	19192	17420	201711
	3,80	5,90	1,70	7,55	2,55	4,65	0,45	4,65	3,80	78	,10
X_6	17295	15476	19113	17554	16516	18158	16950	191137	17295	42972	18204
	1,50	5,05	7,95	6,23	9,13	2,98	7,68	,95	1,50	40	4,73
X_7	19732	19340	20123	20400	18673	21239	18616	21239	19732	8586,6	20583
	3,10	8,45	7,75	2,73	1,23	1,08	7,38	1,08	3,10	0	5,15
$\min_{1 \leq k \leq 7} F_p(X_k)$								18776	17092	0,00	17934
								4,90	8,60		6,75
$\max_{1 \leq k \leq 7} F_p(X_k)$								21984	20378	43645	21228
								8,48	0,90	,15	1,36

Tabela 18. Matriz de *payoff* e estimativas de critérios de escolha para $F_4(X_k)$

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	Y_7	$F^W(X_k)$	$F^L(X_k)$	$F^S(X_k)$	$F^H(X_k)$
X_1	740,33	649,17	831,57	$\frac{1017,4}{2}$	647,90	726,43	569,39	1017,42	740,31	309,53	905,41
X_2	598,06	641,95	554,24	786,53	550,18	483,34	571,89	786,53	598,03	32,19	710,73
X_3	724,43	744,86	703,99	$\frac{1007,6}{9}$	644,90	624,47	620,33	1007,69	724,38	238,79	910,85
X_4	630,10	667,87	592,48	841,16	559,71	498,49	620,73	841,16	630,08	72,26	755,49
X_5	585,86	649,75	522,04	768,91	539,79	452,45	581,98	768,91	585,82	12,59	689,79
X_6	739,44	742,30	736,58	$\frac{1042,1}{2}$	644,21	641,35	629,76	1042,12	739,39	273,21	939,03
X_7	615,42	658,26	572,72	799,22	569,14	502,85	590,19	799,22	615,40	50,68	725,13
$\min_{1 \leq k \leq 7} F_p(X_k)$								768,91	585,82	12,59	689,79
$\max_{1 \leq k \leq 7} F_p(X_k)$								$\frac{1042,1}{2}$	740,31	309,53	939,03

A aplicação de (8) às estimativas dos critérios de escolha fornecidas nas Tabelas 15-17 e a aplicação de (9) às estimativas dos critérios de escolha da Tabela 18 permitiu a construção de matrizes modificadas das estimativas dos critérios de escolha apresentadas na Tabela 19.

Tabela 19. Matrizes modificadas com estimativa dos critérios de escolha

	F_1				F_2				F_3				F_4			
	F^W	F^L	F^S	F^H	F^W	F^L	F^S	F^H	F^W	F^L	F^S	F^H	F^W	F^L	F^S	F^H
X_1	0,32	0,35	0,62	0,36	0,00	0,00	1,00	0,00	0,04	0,27	0,95	0,15	0,09	0,00	0,00	0,13
	66	28	97	99	00	00	00	00	43	53	73	89	04	00	00	49
X_2	0,47	0,54	0,47	0,51	0,68	0,70	0,30	0,69	0,49	0,56	0,47	0,55	0,93	0,92	0,93	0,91
	37	79	37	38	95	69	63	64	84	39	50	06	55	10	40	60
X_3	1,00	1,00	0,00	1,00	1,00	1,00	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,12	0,10	0,23	0,11
	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	60	31	83	31
X_4	0,00	0,00	1,00	0,00	0,26	0,28	0,77	0,27	1,00	1,00	0,00	1,00	0,73	0,71	0,79	0,73
	00	00	00	00	98	37	78	80	00	00	00	00	55	36	91	64
X_5	0,46	0,53	0,50	0,49	0,77	0,79	0,22	0,78	0,65	0,63	0,39	0,67	1,00	1,00	1,00	1,00
	40	81	65	76	25	49	44	23	89	91	91	91	00	00	00	00
X_6	0,93	0,94	0,07	0,94	0,98	0,97	0,03	0,98	0,10	0,06	0,98	0,08	0,00	0,06	0,06	0,00
	30	70	94	10	74	36	71	38	51	16	46	19	00	0	0	00
X_7	0,01	0,12	0,93	0,06	0,21	0,25	0,82	0,23	0,76	0,80	0,19	0,80	0,88	0,80	0,87	0,85
	93	25	53	54	86	14	07	58	76	34	67	43	90	86	17	82

Finalmente, a Tabela 20 reflete os níveis agregados das estimativas dos critérios de escolha *fuzzy*, que permitem indicar como solução do problema X_2^0 (segunda linha da Tabela 10). Essa solução pode ser implementada, tomando $X_1 = 0$. Porém, se X_1 tiver um

valor mais significativo (digamos, $X_1 = U\$50,000.00$), é necessário, como é discutido em Pedrycz e Gomide (1998), retirar X_1 da consideração e resolver o problema novamente.

Tabela 20. Matriz com os níveis agregados das estimativas dos critérios de escolha *fuzzy*

	μ_W^D	μ_D^L	μ_D^S	μ_D^H
X_1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
X_2	0,4737	0,5479	0,3063	0,5138
X_3	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
X_4	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
X_5	0,4640	0,5381	0,2244	0,4976
X_6	0,0000	0,0060	0,0371	0,0000
X_7	0,0193	0,1225	0,1967	0,0654
$\max \mu_D^{max}(X_k)$	0,4737	0,5479	0,3063	0,5138

6. Conclusão

Os resultados apresentados neste artigo estão associados a uma análise multicritério (análise de modelos $\langle X, F \rangle$) em condições de incerteza com a consideração de funções objetivo construídas com base em informações quantitativas e qualitativas. Estes resultados estão relacionados com a extensão do esquema geral de tomada de decisão multicritério em condições de incerteza, utilizando a generalização baseada em conjuntos *fuzzy* da abordagem clássica para lidar com a incerteza da informação para produzir soluções, incluindo soluções robustas, na análise de problemas multicritério. A utilização do esquema geral na sua forma original permite utilizar ao máximo a informação quantitativa disponível. Caso a utilização de informação quantitativa não conduza a uma solução única, o esquema geral pressupõe a utilização de informação de caráter qualitativo (obtida dos DMs) aplicada na fase de decisão final. Porém, surgem com mais frequência problemas que exigem a consideração de objetivos formados com base em informações quantitativas em todas as etapas da decisão. Considerando isso, os resultados de Ramalho *et al.* (2019) foram direcionados à construção de soluções multicritério, incluindo soluções multicritério robustas, através da construção de combinações representativas de dados iniciais, estados da natureza ou cenários com a utilização direta de informações qualitativas apresentadas juntamente com informações quantitativas. No entanto, o processamento de informações qualitativas em Ramalho *et al.* (2019) baseia-se no uso de uma abordagem muito simplificada para agregar estimativas de preferências individuais de especialistas dentro de um modelo de tomada de decisão em grupo, sem construir e analisar diversos tipos de informações de consenso.

Considerando isso, os resultados do presente trabalho permitem a construção de combinações representativas de dados iniciais, estados de natureza ou cenários com uso direto de informações qualitativas, com base em estimativas de preferências individuais de especialistas agregadas após obtenção do consenso necessário. Para concretizar isso,

foi proposto o novo esquema de construção de consenso, cuja utilização permite evitar pontos negativos inerentes às abordagens tradicionais e reduzir os níveis de incerteza na estimativa de coeficientes de funções objetivo construídas com base na aplicação de informações qualitativas. As escolhas e combinações metodológicas utilizadas no presente trabalho constituem um importante aspecto original desta pesquisa. Os resultados apresentados são de caráter universal; em particular, foram aplicados à formulação e análise do problema de alocação multicritério de recursos no planejamento da expansão da produção empresarial. Os resultados obtidos demonstram claramente a redução do grau de incerteza na estimativa dos coeficientes das funções objetivo construídas, possibilitando a obtenção de uma decisão mais coerente e consistente.

Referências

- ALONSO, S. *et al.* Visualizing consensus in group decision making situations. *In: IEEE INTERNATIONAL FUZZY SYSTEMS CONFERENCE*, 2007, London. **Proceedings** [...]. London: IEEE, 2007. p. 1-6.
- BELLMAN, R. E.; ZADEH, L. A. Decision-making in a fuzzy environment. **Management Science**, v. 17, n. 4, p. 141-164, 1970.
- BELYAEV, L. S. **A practical approach to choosing alternative solutions to complex optimization problems under uncertainty**. Laxenburg: International Institute for Applied Systems Analysis, 1977.
- BERNARDES, P. *et al.* Fuzzy set based multicriteria decision making and its applications. *In: HOFFMANN, E. T. Progress in nonlinear analysis research*. Hauppauge: Nova Science Publisher, 2008. p. 247-272.
- CABRERIZO, F. J. *et al.* Soft consensus measures in group decision making using unbalanced fuzzy linguistic information. **Soft Computing**, v. 21, p. 3037-3050, 2017.
- CHEN, S. M. *et al.* Adaptive consensus support model for group decision making systems. **Expert Systems with Applications**, v. 39, n. 16, p. 12580-12588, Nov. 2012.
- CHEN, S. M.; TSAI, B. H. A new method for autocratic decision making using group recommendations, in: Machine Learning and Cybernetics (ICMLC). INTERNATIONAL CONFERENCE ON MACHINE LEARNING AND CYBERNETICS, 2013, Tianjin, China. **Proceedings** [...]. New Jersey, IEEE, 2013. p. 1250-1255.
- COELHO, C. A. C. Evolutionary multi-objective optimization: Critical review. *In: SARKER, R.; MOHAMMADIAN, M.; YAO, X. (eds.). Evolutionary optimization*. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2005. p. 117-146.
- DONG, Y. *et al.* Consensus-based group decision making under multi-granular unbalanced 2-tuple linguistic preference relations. **Group Decision and Negotiation**, v. 24, p. 217-242, 2015.
- EHRGOTT, M. Multicriteria optimization. Berlin: Springer-Verlag, 2005.

- EKEL, P. I. *et al.* Multiobjective and multiattribute decision making in a fuzzy environment and their power engineering applications. **Information Sciences**, v. 361/362, p. 100-119, Sep. 2016.
- EKEL, P.; PEDRYCZ, W.; PEREIRA JR., J. **Multicriteria decision-making under conditions of uncertainty: fuzzy set perspective**. New Jersey: John Wiley & Sons, 2019.
- EKEL, P.; PEDRYCZ, W.; SCHINZINGER, R. A general approach to solving a wide class of fuzzy optimization problems. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 97, n. 1, p. 49-66, Jul. 1998.
- EKEL, P. *et al.* Fuzzy set based models and methods of multicriteria group decision making. **Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications**, v. 71, n. 12, p. e409-e419, Dec. 2009.
- EKEL, P. Ya. Fuzzy sets and models of decision making. **Computers and Mathematics with Applications**, v. 44, n. 7, p. 863-875, Oct. 2002.
- EKEL, P. Ya.; GALPERIN, E. A. Box-triangular multiobjective linear programs for resource allocation with application to load management and energy market problems. **Mathematical and Computer Modelling**, v. 37, n. 1/2, p. 1-17, Jan. 2003.
- EKEL, P. Ya.; MARTINI, J. S. C.; PALHARES, R. M. Multicriteria analysis in decision making under information uncertainty. **Applied Mathematics and Computation**, v. 200, n. 2, p. 501-516, Jul. 2008.
- EKEL, P. Y., SCHUFFNER NETO, F. H. Algorithms of discrete optimization and their application to problems with fuzzy coecients. **Information Sciences**, v. 176, n. 19, p. 2846-2868, 2006.
- FIGUEIRA, J.; GRECO, S.; EHRGOTT, M. **Multiple criteria decision analysis: state of the art surveys**. New York: Springer, 2005. (International Series in Operations Research & Management Science, 78).
- HERRERA, F.; HERRERA-VIEDMA, E.; CHICLANA, F. Multiperson decision-making based on multiplicative preference relations. **European Journal of Operational Research**, v. 129, n. 2, p. 372-385, Mar. 2001.
- HERRERA-VIEDMA, E. *et al.* A review of soft consensus models in a fuzzy environment. **Information Fusion**, v. 17, p. 4-13, May 2014.
- HWANG, C. L.; MASUD, A. S. **Multiple objective decision making: methods and applications**. Berlin: Springer-Verlag, 1979.
- HWANG, C. L.; YOON, K. **Multiple attribute decision making: methods and applications - a state-of-the-art survey**. Berlin: Springer-Verlag, 1981.
- KOKSALMIS, E., KABAK, O. Deriving decision makers' weights in group decision making: An overview of objective methods. **Information Fusion**, v. 49, p. 146-160, Sep. 2019.

KOKSALMIS, E., KOKSALMIS, G. H., KABAK, O. A combined method for deriving decision makers' weights in group decision making environment: an application in medical decision making. In: CALISIR, F. *et al.* **Industrial engineering in the big data era: lecture notes in management and industrial engineering**. New York: Springer, 2019. p. 503-513.

LOOTSMA, F. A. **Multi-criteria decision analysis via ratio and difference judgement**. New York: Springer, 2007. (Springer Science & Business Media, 29).

LUCE, R. D.; RAIFFA, H. **Games and decisions**. New York: John Wiley & Sons, 1958.

ORLOVSKY, S. **Problems of decision-making with fuzzy information**. Laxenburg, Austria: IIASA Working Paper, 1983.

PARREIRAS, R.; EKEL, P. Construction of nonreciprocal fuzzy preference relations with the use of preference functions. **Pesquisa Operacional**, v. 33, n. 2, p. 305-323, Aug. 2013.

PARREIRAS, R.; EKEL, P.; BERNANDES JR., F. A dynamic consensus scheme based on a nonreciprocal fuzzy preference relation modeling. **Information Sciences**, v. 211, p. 1-17, Nov. 2012a.

PARREIRAS, R. *et al.* Tomada de decisão multicritério em grupo com estrutura hierárquica usando modelagem das relações de preferência *fuzzy*. In: IBEROAMERICAN MEETING ON MULTICRITERIA EVALUATION AND DECISION, 5., 2011, Ubatuba. **Proceedings** [...]. Rio de Janeiro: SOBRAPO, 2011. p. 3368-3380.

PARREIRAS, R. O.; EKEL, P. Ya.; MORAIS, D. C. Fuzzy set based consensus schemes for multicriteria group decision making applied to strategic planning. **Group Decision and Negotiation**, v. 21, p. 153-183, 2012.

PARREIRAS, R. O. *et al.* A flexible consensus scheme for multicriteria group decision making under linguistic assessments. **Information Sciences**, v. 180, n. 7, p. 1075-1089, Apr. 2010.

PEDRYCZ, W.; EKEL, P.; PARREIRAS, R. **Fuzzy multicriteria decision-making: models, methods, and applications**. Chichester: John Wiley & Sons, 2011.

PEDRYCZ, W.; GOMIDE, F. **An introduction to fuzzy sets: analysis and design**. Cambridge: MIT Press, 1998.

PEREIRA JR., J. G. *et al.* On multicriteria decision making under conditions of uncertainty. **Information Sciences**, v. 324, p. 44-59, Dec. 2015.

RAIFFA, H. **Decision analysis: introductory lectures on choices under uncertainty**. Massachusetts: Addison-Wesley, Reading, Mass, 1968.

RAMALHO, F. *et al.* Multicriteria decision making under conditions of uncertainty in application to multiobjective allocation of resources. **Information Fusion**, v. 49, p. 249-261, Sep. 2019.

- RAMANATHAN, R.; GANESH, L. Group preference aggregation methods employed in ahp: An evaluation and an intrinsic process for deriving members' weightages. **European Journal of Operational Research**, v. 79, n. 2, p. 249-265, Dec. 1994.
- ROY, B. To better respond to the robustness concern in decision aiding: Four proposals based on a twofold observation. In: ZOPOUNIDISM, C.; PARDALOS P. M. (ed.). **Handbook of multicriteria analysis**. Berlin: Springer-Verlag, 2010. p. 3-24.
- SAATY, T. **The analytic hierarchy process**. New York: McGraw-Hill, 1980.
- SAATY, T. L.; PENIWATI, K.; SHANG, J. S. The analytic hierarchy process and human resource allocation: half the story. **Mathematical and Computer Modelling**, v. 46, n. 7/8, p. 1041-1053, Oct. 2007.
- SAATY, T. L.; VARGAS, L. G.; DELLMAN, K. The allocation of intangible resources: the analytic hierarchy process and linear programming. **Socio-Economic Planning Sciences**, v. 37, p. 169-184, 2003.
- SOBOL, I.; STATNIKOV, R. **The choice of optimal parameters in problems with many criteria**: textbook: manual for universities. Moscow: Drofa, 2006.
- SOBOL', I. M. On the systematic search in a hypercube. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 16, n. 1, p. 790-793, 1979.
- TOLOIE-ESHLAGHY, A.; FAROKHI, E. N. Measuring the importance and the weight of decision makers in the criteria weighting activities of group decision making process. **American Journal of Scientific Research**, v. 24, p. 6-12, 2011.
- WEBSTER, T. J. **Managerial economics**: theory and practice. London: Academic Press, 2003.
- YAGER, R. R. On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decisionmaking. **IEEE Transactions on systems, Man, and Cybernetics**, v. 18, n. 1, p. 183-190, Jan./Feb. 1988.
- ZHANG, Q.; CHENA, J. C. H.; CHONG, P. P. Decision consolidation: criteria weight determination using multiple preference formats. **Decision Support Systems**, v. 38, n. 2, p. 247-258, Nov. 2004.
- ZIO, E.; PEDRONI, N. **Methods for representing uncertainty**: a literature review. Toulouse, France: Cahiers de la Sécurité Industrielle; Foundation for an Industrial Safety Culture, 2013.

Tomada de decisão multiatributo para processamento da informação qualitativa aplicada à prospecção de alternativas locais para a geração de energia renovável⁶

Livia Maria Leite Da Silva, Petr Ekel; Douglas Vieira, Gustavo Luís Soares, Laura Cozzi Ribeiro

1. Introdução

Além do caráter intermitente, o potencial energético renovável apresenta dispersão espacial irregular ao longo do globo, que é determinada pela disponibilidade de determinados recursos naturais. Muitas vezes, apesar da ocorrência de potencial energético significativo em determinadas áreas, podem existir fatores restritivos à instalação de usinas de geração nesses locais, ligados a aspectos de caráter político, social e/ou legislativo. Além disso, os sistemas de geração de energia são frequentemente considerados como negócios de risco, pois envolvem investimentos iniciais elevados e longos períodos de retorno (Ramachandra; Shuruthi 2007).

Portanto, o processo de análise para determinação de alternativas locais para a geração renovável deve ser capaz de priorizar projetos de acordo com uma ampla gama de considerações, incluindo critérios técnicos e econômicos, bem como avaliações de caráter qualitativo (por exemplo, relacionadas a objetivos estratégicos do governo e/ou de investidores) (Mukhamediev *et al.*, 2019). Nesse sentido, este trabalho se dedica a desenvolver procedimentos de tomada de decisão para apoiar a avaliação, comparação, escolha, priorização e/ou ordenação de alternativas locais para instalação de sistemas de geração de energia renovável (SGERs).

O processo de decisão considerado baseia-se na aplicação da análise multicritério espacial (AME) apoiada no desenvolvimento e análise de modelos baseados em conjuntos *fuzzy*. Em primeiro lugar, é abordada uma das questões mais importantes relacionadas com processos de decisão que envolvem múltiplos critérios, que é a quantificação da sua importância relativa. Essa quantificação depara-se com dificuldades relacionadas com o fato de os critérios terem graus variados de importância para diferentes decisores. Nesse sentido, é necessário definir a importância relativa desses critérios, o que normalmente é feito atribuindo-se um determinado peso a cada um. A definição correta dos pesos é importante para refletir as preferências dos decisores de forma adequada. Assim, para isso, foram adaptadas técnicas para consideração de informações de caráter qualitativo em modelos multiobjetivos, propostas em (Ramalho *et al.*, 2019) e, mais recentemente, discutidas em (Ekel; Pedrycz; Pereira Jr., 2020). Essas técnicas permitem refletir os níveis de importância dos critérios para os problemas espaciais multiatributos de acordo com as opiniões dos diferentes decisores. Em particular, o uso das técnicas permite que esses especialistas expressem as suas preferências de acordo com diferentes formatos de representação. Os diferentes formatos de preferência são então transformados em

⁶ **Reconhecimento:** A versão de registro deste artigo está publicada na *IEEE Access*, e está disponível em: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.3012098>.
SILVA, L. M. L. *et al.* Multiattribute spatial decision-making for qualitative information processing as applied to the renewable energy generating sites prospection. *IEEE Access*, v. 8, p. 137745-137757, 2020.

Relações de Preferência Multiplicativas e são processados no âmbito do método AHP (Saaty, 1980). Os pesos finais dos critérios são obtidos pela aplicação do operador *Ordered Weighted Averaging* (OWA) (Yager, 1988) que permite controlar os níveis de compensação mútua entre as avaliações individuais.

Após determinadas as importâncias relativas dos critérios espaciais, os modelos utilizados permitem aos decisores escolher operações de agregação desses critérios de acordo com suas preferências. Nesse trabalho, a regra de decisão é definida pelo operador OWA (Yager, 1988) com a aplicação dos chamados Quantificadores Linguísticos (QL) (Yager, 1996). Assim, são obtidos mapas de decisão que permitem destacar as alternativas de soluções mais racionais. Nesse ponto, geralmente, é bastante comum obter um conjunto de alternativas de solução, que, do ponto de vista formal, são indistinguíveis. Considerando isso, para definir um portfólio com as áreas mais adequadas e favoráveis à implantação dos SGERs, é importante promover a ordenação dessas alternativas, por meio da consideração de critérios adicionais, que podem ter caráter quantitativo e/ou qualitativo, espacial e/ou não espacial. Isto pode ser alcançado pelo uso de diferentes formatos de preferência, sua transformação para um mesmo formato, no caso, Relações de Preferência *Fuzzy* (RPFs) e processamento baseado nos modelos $\langle X, R \rangle$ (Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011). Essa abordagem já foi amplamente utilizada para resolver problemas de engenharia de energia (por exemplo, (Ekel *et al.*, 2016) e (Ekel *et al.*, 2019)), e é utilizada neste trabalho, pela primeira vez, para o processamento de informações espacializadas.

Os processos para tomada de decisão, relacionados com a análise de alternativas locais para instalação de SGERs, estão associados a profundas incertezas. Essas incertezas, de acordo com (Durbach; Stewart 2012), podem ser divididas em duas classes: as incertezas internas (relacionadas às opiniões, valores e julgamentos de decisores e especialistas) e as incertezas externas (associadas às condições ambientais fora do controle humano). Levando isso em consideração, é importante ressaltar que todos os modelos e métodos aplicados no presente trabalho lidam com incertezas internas e externas. Assim, a principal contribuição deste trabalho é o desenvolvimento de ferramentas metodológicas para considerar informações qualitativas na resolução de problemas espaciais com sua aplicação particular na determinação de locais adequados à instalação de SGERs. O principal fator inovador é a adaptação e aprimoramento dos modelos (Ramalho *et al.*, 2019) que permitem considerar a questão da quantificação dos níveis de importância relativa dos critérios espaciais, considerando que esses níveis podem ser bastante diferentes para diferentes decisores. A aplicação dos fundamentos metodológicos para construção e análise dos modelos $\langle X, R \rangle$ para avaliação das alternativas de solução segundo critérios adicionais de caráter quantitativo e/ou qualitativo espacial é outro fator inovador desta pesquisa.

A atribuição de pesos para refletir a importância de critérios espaciais por meio do método AHP é amplamente utilizada na literatura correlacionada (Al Garni; Awasthi, 2018). No trabalho (Merrouni *et al.*, 2018), os autores utilizam a AME, aplicando o método AHP, para avaliar áreas ao Leste do Marrocos adequadas para receber centrais fotovoltaicas de grande escala. Os autores de (Yushchenko *et al.*, 2017) avaliam os potenciais geográficos e técnicos para a geração de energia solar nas áreas rurais da África

Ocidental utilizando a abordagem baseada em AHP-AME. Abordagens semelhantes são utilizadas: em (Li, 2018) para avaliar áreas potencialmente adequadas ao aproveitamento dos recursos de energia eólica na província de Liaoning (China); em (Vasileiou; Loukogeorgaki; Vagiona, 2017), para identificar zonas marinhas adequadas para a instalação de sistemas híbridos de energia eólica *offshore* e marítima na Grécia; em (Al Garni; Awasthi, 2017) para avaliar a aptidão do terreno para a instalação de usinas de energia solar fotovoltaica na Arábia Saudita; em (Doorga; Rughooputh; Boojhawon, 2019) para identificar locais para parques solares nas Ilhas Maurício; em (Ali *et al.*, 2018) para avaliar a adequação de localidades para recepção de parques eólicos e solares em Songkhla (Tailândia); em (Aly; Jensen; Pedersen, 2017) para investigar a adequação espacial para instalações de energia solar de grande escala na Tanzânia.

Em todos os trabalhos citados, as Relações de Preferência Multiplicativas (RPM) são a única forma de realizar a modelagem de preferências, e as avaliações de grupo não são abordadas. Os autores de (Díaz-Cuevas *et al.*, 2018) aplicaram um modelo de apoio à decisão, baseado em AHP-AME, para determinar os locais mais favoráveis para a instalação de turbinas eólicas em Cádiz, sul de Espanha. Ainda em (Díaz-Cuevas *et al.*, 2018), um grupo de especialistas realizou as avaliações dos critérios espaciais. No entanto, esse trabalho não reflete formas de considerar as avaliações individuais. Assim, o aspecto coletivo das avaliações assume um caráter totalmente subjetivo. Os autores de (Marques-Perez *et al.*, 2020) criaram um mapa que mostra a classificação de áreas com alto potencial para o desenvolvimento de parques solares na Comunidade Valenciana (Espanha). Os autores de (Giamalaki e Tsoutsos 2019) recomendaram áreas para instalação de parques de geração de energia solar no Mediterrâneo. Em ambos os trabalhos ((Marques-Perez *et al.*, 2020) e (Giamalaki; Tsoutsos, 2019)) é realizada a avaliação de critérios espaciais por um grupo de especialistas. Nesse sentido, cada especialista expressa suas preferências através das RPM, e o método AHP é utilizado para obter um vetor de pesos individual. Esses vetores são agregados para gerar as preferências do grupo utilizando o operador média geométrica. Porém, nesses trabalhos (Marques-Perez *et al.*, 2020) e (Giamalaki; Tsoutsos, 2019), não são utilizados diferentes formatos de preferência, não são considerados critérios espaciais qualitativos e não são abordadas incertezas relacionadas ao processo de decisão.

Com relação a AME baseada no operador OWA, ela também foi abordada em trabalhos recentes (Firozjaei *et al.*, 2019) e (Shorabeh, 2019). Em Firozjaei *et al.* (2019), os autores realizaram um estudo para identificar locais adequados para a instalação de usinas solares no Irã, onde a AME orientada pela agregação OWA foi utilizada para gerar mapas de decisão de acordo com diferentes níveis de compensação intercriterios. A mesma abordagem foi aplicada em (Shorabeh, 2019) para determinação de áreas potenciais para recepção de usinas de energia solar em quatro províncias do Irã. Porém, esses trabalhos não utilizam técnicas de avaliação em grupo e também não consideram critérios espaciais qualitativos.

Neste trabalho, ferramentas metodológicas e diferentes combinações são aplicadas a um Estudo de Caso relacionado à seleção de locais para SGERs no estado de Minas Gerais, Brasil. As fontes de energia renováveis são representadas pelas energias eólica e solar fotovoltaica (PV). O potencial de biomassa é considerado como critério

espacial adicional. No estado de Minas Gerais, não existem usinas operando com as fontes solar e eólica de forma híbrida. Além disso, o Plano Decenal de Expansão de Energia 2029 (Brasil, 2020) prevê um aumento significativo na participação dessas fontes no fornecimento de energia elétrica no horizonte de dez anos. Nesse sentido, os resultados deste trabalho podem fornecer indicadores importantes para governos e investidores.

Finalmente, ressalta-se que as análises e os procedimentos utilizados têm caráter flexível e podem ser estendidos para lidar com outras fontes de energia, bem como com outros problemas de localização.

2. Análise multicritério espacial (AME)

2.1. Identificação dos critérios espaciais relevantes para a decisão

Alguns dos critérios espaciais mais comuns $f_i(x)$, $i = 1, \dots, n$ aplicados por autores de trabalhos correlacionados são: potencial energético renovável (Al Garni; Awasthi, 2018), distância de estradas e vias de acesso (Merrouni *et al.*, 2018), presença e distância de centros urbanos (Merrouni *et al.*, 2018), presença de corpos hídricos (Merrouni *et al.*, 2018), declividade do relevo (Doorga; Rughooputh; Boojhawon, 2019), distância dos sistemas de transmissão de energia (Mortaz; Valenzuela, 2019), valor econômicos de terras (Al Garni; Awasthi, 2017), presença de florestas e áreas de conservação e/ou proteção integral (Costa *et al.*, 2020). Um resumo compilado dos critérios utilizados pela bibliografia pode ser encontrado em Yushchenko *et al.*, 2017.

2.2. Análise Multicritério Espacial baseada em conjuntos fuzzy

Basicamente, a AME é um conjunto de procedimentos que transformam e combinam dados geográficos (mapas de entrada ou critérios espaciais) e preferências de decisores em um mapa de decisão (mapa de saída), baseado em uma regra de decisão determinada (Malczewski; Rinner, 2015). Ao utilizar esse tipo de ferramenta, zonas de exclusão podem ser identificadas por meio de critérios restritivos (restrições). A adequação das áreas restantes pode ser avaliada de acordo com um segundo conjunto de critérios, denominados critérios do tipo de fator. Ambos os tipos de critérios podem ser representados por meio de conjuntos fuzzy, que são caracterizados por funções de pertinência (FPs) que associam cada objeto de interesse pertencente ao universo de discurso U a um valor que reflete o nível de sua pertinência ao conjunto fuzzy (Zadeh, 1965).

Na AME, a informação georreferenciada (Goodchild, 1992) pode ser descrita por geocampos (representação matricial), que refletem o espaço geográfico como uma superfície contínua dividida em uma grade regular de células, onde os fenômenos de interesse são representados. Matematicamente, a área geográfica é formalizada como uma função que associa os valores dos atributos (fenômenos de interesse) considerados na análise, a uma estrutura espacial (eixos espaciais). De acordo com esta representação, a variável espacial considerada em um modelo pode ser definida como $x = (x_1, x_2)$, onde x_1 e x_2 correspondem aos valores de longitude e latitude, respectivamente. Já os

conjuntos *fuzzy* podem ser considerados como geocampos que relacionam cada localização a um valor na faixa de 0 a 1 através da FP correspondente. Esse valor reflete o grau em que o local atende a determinado critério de decisão. O mapeamento assim formado depende dos atributos de cada localidade, que são refletidos pelos geocampos $g_i(x)$, $i = 1, \dots, n$ de dados relativos a cada critério espacial $f_i(x)$, $i = 1, \dots, n$.

Assim, a fim de construir conjuntos *fuzzy* $A_i(x)$, $i = 1, \dots, n$ com FP $\mu_{A_i}(g_i(x))$, $i = 1, \dots, n$, refletindo o grau de atendimento de cada critério de decisão, é possível utilizar (Ekel; Pedrycz; Pereira Jr., 2020)

$$\mu_{A_i}(g_i(x)) = \left[\frac{\max g_i(x) - g_i(x)}{\max g_i(x) - \min g_i(x)} \right] \quad (1)$$

para critérios de minimização ou

$$\mu_{A_i}(g_i(x)) = \left[\frac{g_i(x) - \max g_i(x)}{\max g_i(x) - \min g_i(x)} \right] \quad (2)$$

para critérios de maximização. Outras expressões também podem ser utilizadas. Por exemplo (ESRI, 2018):

$$\mu_{A_i}(g_i(x)) = \frac{1}{1 + \left(\frac{g_i(x)}{md} \right)^{sp}} \quad (3)$$

para critérios de minimização e

$$\mu_{A_i}(g_i(x)) = \frac{1}{1 + \left(\frac{g_i(x)}{md} \right)^{-sp}} \quad (4)$$

para critérios de maximização. Os parâmetros *sp* e *md* estão relacionados ao *spread* e ao ponto médio das FPs, respectivamente.

A escolha das expressões (conjuntos *fuzzy*) que melhor representem os critérios analisados é uma prerrogativa dos decisores.

Na consideração de múltiplos critérios, múltiplos conjuntos *fuzzy* $A_i(x)$, $i = 1, \dots, n$ devem ser construídos e uma função de agregação ou regra de decisão $h: [0,1]^n \rightarrow [0,1]$ pode ser aplicada para gerar uma decisão *fuzzy*. Para fazer isso, é possível utilizar o operador OWA (Yager, 1988). Esse operador permite implementar uma família de procedimentos de agregação multicritério (Yager, 1996), que para um determinado conjunto de elementos (no caso deste trabalho, critérios espaciais ou geocampos (conjuntos *fuzzy*)), associam um vetor de pesos ordenados ω_i , $i = 1, \dots, n$, ($\omega_i \in [0,1]$ e $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$) com a *i*-ésima localização e realizam a agregação

$$A_D(x) = \text{OWA}(A_1(x), \dots, A_n(x)) = \sum_{i=1}^n \omega_i c_i \quad (5)$$

onde c_i é o *i*-ésimo maior elemento de $A_i(x)$, $i = 1, \dots, n$.

Diferentes ajustes do vetor de pesos ordenados permitem regular o nível de compensação intercritério ou o nível de tolerância ao risco dos decisores. Existem diversas variações do operador OWA propostas na literatura (Xu, 2005). Uma forma de determinação natural para esses pesos e que facilita a modelagem das informações qualitativas fornecidas pelos decisores é a utilização de Quantificadores Linguísticos Fuzzy (FLQs) (Yager, 1996). Os QLFs são conjuntos *fuzzy* que refletem o nível com que uma porção dos critérios satisfaz o conceito apresentado pelo quantificador. Assim, é possível gerar um vetor de pesos capaz de refletir atitudes de tomada de decisão, como atender a “Maioria” dos critérios, “Todos” os critérios, “Tantos Quanto Possível”, “Pelo Menos Metade” etc. Uma vez escolhido o QLF apropriado, os pesos de ordenação podem ser obtidos usando a seguinte expressão (Xu, 2005):

$$\omega_i = Q\left(\frac{i}{n}\right) - Q\left(\frac{i-1}{n}\right), \quad i = 1, \dots, n \quad (6)$$

Aqui, esta abordagem será aprofundada pela consideração de casos onde os critérios espaciais individuais têm importâncias individuais, levando em consideração os resultados de (Yager, 1996). Nesse sentido, o conjunto de critérios espaciais é associado a um segundo vetor de pesos $v_i, i = 1, \dots, n$ que indicam a importância relativa de cada critério. Não há restrição quanto à soma total dos níveis de importância não negativos, ou seja, sua soma não precisa ser igual a um. A agregação pode ser orientada pelos QLFs que fornecem os pesos do OWA da seguinte forma:

$$\omega_i = Q\left(\frac{\sum_{k=1}^i v_k}{T}\right) - Q\left(\frac{\sum_{k=1}^{i-1} v_k}{T}\right), \quad i = 1, \dots, n \quad (7)$$

onde $T = \sum_{k=1}^n v_k$ está a soma total dos níveis de importância.

Assim, a avaliação global de cada alternativa de solução ainda é definida por (5).

Na próxima seção apresentamos procedimentos que podem ser utilizados para determinação dos pesos $v_i, i = 1, \dots, n$ de acordo com as preferências de um conjunto de especialistas ou decisores.

2.3. Avaliação dos critérios espaciais de acordo com as preferências de diferentes especialistas

Para incorporar as preferências de diferentes especialistas $e_i, i = 1, \dots, E$, relacionadas aos níveis de importância atribuídos a cada critério espacial, os modelos (Ramalho *et al.*, 2019) para consideração de informações qualitativas na análise multiobjetivo são adaptados para problemas de decisão espacial multiatributo. Além disso, diferentes especialistas envolvidos no processo de decisão podem ter suas próprias percepções do problema. Isso torna natural que tais profissionais possuam diferentes formas de expressar suas preferências. Considerando isso, também foram aplicados os resultados relacionados à conversão de diferentes formatos de preferência baseada na aplicação das chamadas funções de transformação (Ekel; Pedrycz; Pereira Jr., 2020).

A abordagem descrita está associada às seguintes etapas: 1) Levantamento de preferências; 2) Modelagem de preferências por meio de RPMs; 3) Definição dos vetores

de pesos/preferências, aplicando o método AHP; 4) Agregação de preferências obtidas baseada na utilização do operador OWA.

2.3.1. Levantamento de preferências

As preferências dos especialistas são consideradas por meio da determinação do vetor de pesos $v_i, i = 1, \dots, n$ relacionados aos n critérios espaciais. Esse vetor é obtido por meio de informações qualitativas relacionadas às preferências de um ou mais especialistas envolvidos, expressas nos formatos de preferência correspondentes.

Aqui surge uma questão fundamental sobre como se podem construir relações de preferência para refletir as preferências individuais de cada analista, dado que diferentes profissionais podem ter percepções próprias sobre o problema e, consequentemente, diferentes formas de expressar suas preferências. Nesse sentido, vários fatores podem influenciar a forma como alguém expressa suas preferências relacionadas com diferentes critérios relevantes. Por exemplo: incerteza da informação disponível, conhecimento, experiência e intuição individuais, bem como o caráter idiossincrático da natureza humana (um especialista pode considerar que um formato de preferência particular é capaz de refletir melhor suas preferências) são todos fatores que influenciam um processo decisório (Pedrycz, Ekel, Parreiras 2011).

Pedrycz, Ekel e Parreiras (2011) analisam formatos de preferência capazes de cobrir a maioria das situações reais de tomada de decisão. Dentre esses formatos, destaca-se a utilização do Ordenamento de Critérios (OC), Relação de Preferência *Fuzzy* Recíproca Aditiva (RPFRA), Relação de Preferência *Fuzzy* Não Recíproca (RPFNR), Estimativas *Fuzzy* (EF) e Relações de Preferência Multiplicativas (RPM). Note-se que os RPFNR e os EF, até certo ponto, são equivalentes (Ramalho *et al.* 2019). Em particular, se dois critérios espaciais $f_k(x), f_l(x) \in f(x)$ possuem estimativas *fuzzy* $\mu[f_k(x)]$ e $\mu[f_l(x)]$, do ponto de vista de sua importância relativa, então a quantidade $\mu_{RPFNR}[f_k(x), f_l(x)]$ é o grau $\mu[f_k(x)] \geq \mu[f_l(x)]$, enquanto a quantidade $\mu_{RPFNR}[f_l(x), f_k(x)]$ é o grau $\mu[f_l(x)] \geq \mu[f_k(x)]$ (Ekel; Pedrycz; Pereira Jr., 2020).

Tendo em conta os resultados de Pedrycz, Ekel e Parreiras (2011), que se baseiam no conceito de uma FP de uma relação de preferência generalizada (Orlovski, 1978), podem ser escritas as seguintes avaliações:

$$\mu_{RPFNR}[f_k(x), f_l(x)] = \sup_{\substack{f_k(x), f_l(x) \in F \\ f_k(x) \geq f_l(x)}} \min\{f_k(x), f_l(x)\} \quad (8)$$

e

$$\mu_{RPFNR}[f_l(x), f_k(x)] = \sup_{\substack{f_k(x), f_l(x) \in F \\ f_l(x) \geq f_k(x)}} \min\{f_k(x), f_l(x)\} \quad (9)$$

considerando que os níveis de importância relativa dos critérios espaciais exigem sempre maximização.

Assim, a disponibilidade de estimativas *fuzzy* para todos $f_k(x), f_l(x) \in f(x)$ possibilita a construção de $\mu_{RPFNR}[f_k(x), f_l(x)]$.

2.3.2. Modelagem de preferências por meio de relações de preferência multiplicativas

O vetor de preferências gerado pela aplicação do AHP (Saaty, 1980) pode ser utilizado como vetor de pesos $v_i, i = 1, \dots, n$ para expressar a importância relativa dos critérios espaciais. A utilização do AHP baseia-se na construção e processamento de RPMs. Assim, para permitir a utilização de diferentes formatos de preferência, é necessário aplicar funções de transformação (Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011), que permitem reduzir os formatos aplicados a RPMs. Em particular, para transformar OC em RPM, é possível (Ramalho *et al.*, 2019) aplicar a seguinte função de transformação:

$$\text{RPM}(f_k(x), f_l(x)) = m^{\frac{OC(f_l(x)) - OC(f_k(x))}{n-1}}, \quad k, l = 1, \dots, n \quad (10)$$

Aplicando a escala de (Saaty, 1980) com $m = 9$, pode-se reduzir (10) para

$$\text{RPM}(f_k(x), f_l(x)) = 9^{\frac{OC(f_l(x)) - OC(f_k(x))}{n-1}}, \quad k, l = 1, \dots, n \quad (11)$$

Nem sempre há a transformação direta de qualquer formato de preferência para MPR. Nessas situações, são necessárias conversões preliminares. Por exemplo, o uso de RPFNRs requer a sua transformação preliminar (Ramalho *et al.*, 2019) em RPFRA:

$$\text{RPFRA}(f_k(x), f_l(x)) = \frac{1}{2}(1 + \text{RPFNR}(f_k(x), f_l(x)) \text{RPFNR}(f_k(x), f_l(x))), \quad k, l = 1, \dots, n \quad (12)$$

seguido pela conversão de (12) para

$$\text{RPM}(f_k(x), f_l(x)) = 9^{(2\text{RPFRA}(f_k(x), f_l(x)) - 1)}, \quad k, l = 1, \dots, n \quad (13)$$

2.3.3. Definição dos vetores de pesos/preferências, aplicando o método AHP

Todas as RPM devem ser consistentes. Seus níveis de consistência podem ser refletidos pelo autovalor máximo da RPM correspondente (Ramalho *et al.*, 2019) que deve ser próximo da dimensionalidade n da RPM (Saaty, 1980). A proximidade oferece a possibilidade de usar o autovetor correspondente como os pesos $v_i, i = 1, \dots, n$ para n critérios espaciais.

2.3.4. Agregação de preferências baseada na utilização do operador OWA

Para gerar um vetor global de pesos para os critérios, os vetores obtidos pelas avaliações individuais de cada especialista devem ser agregados de acordo com a regra de decisão correspondente. A regra aqui utilizada será o operador OWA (Yager, 1988), expresso por (5), de acordo com uma atitude de decisão determinada pelos decisores.

3. Análise de alternativas em ambiente *fuzzy*

É possível que a análise acima descrita permita destacar alternativas que, do ponto de vista formal, são difíceis de distinguir com base na aplicação dos critérios espaciais considerados até então. Levando isso em consideração, torna-se válida a aplicação de técnicas de tomada de decisão multiatributo em ambiente *fuzzy* (Ekel; Pedrycz; Pereira Jr., 2020) para avaliação, comparação, escolha, priorização e/ou ordenação de alternativas de solução. A sua utilização permite considerar de forma adequada critérios adicionais que podem ter caráter quantitativo e/ou qualitativo. A utilização de critérios de caráter qualitativo geralmente se baseia no uso do conhecimento, experiência e intuição dos especialistas envolvidos, mas também pode ser obtida a partir dos mapas “qualitativos”, quando possuem caráter também espacial.

As técnicas para tomada de decisão multiatributo em ambiente *fuzzy*, consideradas em Ekel, Pedrycz e Pereira Jr (2020) e Pedrycz, Ekel e Parreiras (2011), processam preferências refletidas por um par $\langle X, R \rangle$, onde $X = \{X_1, \dots, X_k\}$ é um conjunto de alternativas de solução e $R = \{R_1, \dots, R_b\}$ é um conjunto de RPFNRs que podem ser apresentados como

$$R = [X \times X, \mu_{R_b}(X_k, X_l), X_k, X_l \in X], \quad b = 1, \dots, B \quad (14)$$

onde $\mu_{R_b}(X_k, X_l)$ é a FP da b -ésimo RPFNR (Orlovski, 1981) correspondente ao b -ésimo critério adicional.

Como já indicado, as RPFs não são a única forma de refletir preferências (Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011). Aqui se podem aplicar os mesmos formatos considerados na Subseção C. Mais uma vez, a utilização de diferentes formatos de preferência requer a sua conversão para um único formato (RPFNR). Essa conversão pode ser realizada com base na utilização das funções de transformação consideradas em Pedrycz, Ekel e Parreiras (2011) e, mais recentemente, em Ramalho *et al.* (2019) e Ekel, Pedrycz e Pereira Jr (2020).

De acordo com o exposto, se duas alternativas $X_k, X_l \in X$ possuem estimativas *fuzzy* com FPs $\mu_{R_b}(X_k)$ e $\mu_{R_b}(X_l)$ então a quantidade $\mu_{RPFNR}(X_k, X_l)$ pode ser avaliada por expressões semelhantes a (8) e (9) se o critério considerado estiver associado à maximização. Se o critério exigir minimização, (8) e (9) devem ser escritos para $X_k \leq X_l$ e $X_l \leq X_k$, respectivamente.

A presença de critérios de caráter quantitativo no tratamento dos modelos

$\langle X, R \rangle$ exige a redução das informações quantitativas correspondentes também para RPFs. Em particular, considerando as condições $\bar{\mu}_{R_b}(X_k, X_k) = 0,5$ e $\bar{\mu}_{R_b}(X_k, X_l) + \bar{\mu}_{R_b}(X_l, X_k) = 1$, que são observadas para as RPFRAs, bem como os resultados de Ekel, Pedrycz e Pereira Jr (2020) e Ekel *et al.* (2019), as seguintes expressões podem ser escritas:

$$\bar{\mu}_{R_b}(X_k, X_l) = \frac{F_b(X_k) - F_b(X_l)}{2[\max F_b(X) - \min F_b(X)]} + 0,5 \quad (15)$$

se $F_b(X)$ deve ser maximizado. Se $F_b(X)$ for minimizado, é possível escrever

$$\bar{\mu}_{R_b}(X_k, X_l) = \frac{F_b(X_l) - F_b(X_k)}{2[\max F_b(X) - \min F_b(X)]} + 0,5 \quad (16)$$

As RPFRAs podem ser transformados em RPFNRs aplicando a seguinte regra (Ekel; Pedrycz; Pereira Jr., 2020):

$$\mu_{R_b}(X_k, X_l) = \begin{cases} 1 + \bar{\mu}_{R_b}(X_k, X_l) - \bar{\mu}_{R_b}(X_l, X_k), & \text{se } \bar{\mu}_{R_b}(X_k, X_l) < 0,5 \\ 1, & \text{se } \bar{\mu}_{R_b}(X_k, X_l) \geq 0,5 \end{cases} \quad (17)$$

Diversas técnicas para análise de modelos $\langle X, R \rangle$ são discutidas em (Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011). Um conceito fundamental associado ao uso dessas técnicas está relacionado à função de escolha de Orlovski (Orlovski, 1981). Os resultados de Pedrycz, Ekel e Parreiras (2011) permitem transformar uma RPFNR em uma Relação Estrita de Preferência Fuzzy (REPF) da seguinte forma:

$$\mu_R^S(X_k, X_l) = \max(\mu_R(X_k, X_l) - \mu_R(X_l, X_k), 0) \quad (18)$$

Se $\mu_R^S(X_l, X_k), \forall X_k \in X$ é a FP do conjunto *fuzzy* de todas as alternativas X_k estritamente dominadas por X_l , então seu complemento $1 - \mu_R^S(X_l, X_k), \forall X_k \in X$ gera o conjunto *fuzzy* das alternativas que não são dominadas por X_l . Considerando isso, a FP do conjunto de alternativas não dominadas pode ser expresso como

$$\mu_R^{ND}(X_k) = \min_{X_l \in X} [1 - \mu_R^S(X_l, X_k)] = 1 - \max_{X_l \in X} \mu_R^S(X_l, X_k), \forall X_l \in X \quad (19)$$

Dado que é razoável escolher alternativas de acordo com o nível mais elevado de não dominância, podem-se escolher alternativas X^{ND} da seguinte forma:

$$X^{ND} = \left\{ X_k^{ND} \mid X_k^{ND} \in X, \mu_R^{ND}(X_k^{ND}) = \max_{X_k \in X} \mu_R^{ND}(X_k) \right\} \quad (20)$$

Problemas de escolha, bem como problemas relacionados à avaliação, comparação, priorização e/ou ordenação de alternativas com um único critério podem ser analisados usando (18)-(20). Essas expressões também podem ser aplicadas quando R é um vetor de relações de preferências *fuzzy* para análise de problemas multiatributo.

Uma das técnicas discutidas em Pedrycz, Ekel e Parreiras (2011) utiliza uma abordagem flexível para ajustar o grau de otimismo usando o operador OWA (Yager, 1988). Em particular, uma expressão semelhante a (5) pode ser usada para agregar relações de preferência $\mu_{R_b}(X_k, X_l)$. Com a RPFNR global, é possível obter um *ranking* global das alternativas com base na utilização do *Quantifier Guided Dominance Degree* (QGDD) (Chiclana *et al.*, 1997) da seguinte forma:

$$QGDD(X_k) = OWA(\mu_R(X_k, X_l)), \quad l = 1, \dots, b, \quad l \neq k \quad (21)$$

$QGDD(X_k)$ reflete o nível de dominância de X_k sobre outras alternativas. Assim, é razoável escolher a alternativa X^{ND} com maior nível de não dominância, aplicando uma expressão semelhante a (20).

As técnicas apresentadas para modelagem de preferências em ambiente *fuzzy* podem servir diretamente para a tomada de decisão multicritério em grupo, em casos de participação de um grupo de especialistas no processo de avaliação de alternativas. Discussões mais detalhadas a esse respeito podem ser encontradas em (Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011).

4. Estudo de caso

4.1. Área de estudo e critérios espaciais relevantes para a decisão

Os modelos discutidos acima foram aplicados à prospecção de alternativas locais para SGERs, no estado de Minas Gerais, Brasil. Os critérios de decisão considerados relevantes neste estudo, de acordo com o apontado pela Subseção A, estão resumidos na Tabela I. Os dados georreferenciados utilizados para a construção dos conjuntos *fuzzy* correspondentes foram convertidos para a Projeção Cônica Conforme de Lambert (Harvey, 2008), específica para mapeamento da América do Sul. A resolução foi definida como 500×500, em metros, para todos geocampos de dados, de acordo com (Tobler, 1987).

Tabela 1. Critérios espaciais de decisão

Nome e tipo do critério	Geo-objetos de dados utilizados na definição do domínio dos conjuntos <i>fuzzy</i>	Modelo de normalização
$f_1(x)$: Potencial solar: Fator	$g_1(x)$ – Radiação solar disponível (10 km de resolução) (NASA, 2014).	Conjunto <i>fuzzy</i> expresso por (4) com $sp = 10$ e $md = 5.5 \text{ kWh/m}^2$ (CEMIG 2012).
$f_2(x)$: Potencial eólico: Fator	$g_2(x)$ – Velocidade de ventos disponível (50 km de resolução) (NASA, 2018).	Conjunto <i>fuzzy</i> expresso por (4) com $sp = 10$ e $md = 6 \text{ m/s}$ (Amarante, Silva, Piá 2010).

$f_3(x)$ – Valor econômico de terras nuas: Fator	$g_3(x)$ – Estimativa dos custos da terra por hectare e por classe de uso do solo (EMATER, 2019).	Conjunto <i>fuzzy</i> expresso por (1).
$f_4(x)$: Áreas de baixa declividade: Fator	$g_4(x)$ – Declividade do relevo (CPRM, 2010).	Conjunto <i>fuzzy</i> expresso por (3) com $sp = 10$ e $md = 8\%$ (CEMIG 2012).
$f_5(x)$: Conexão ao Sistema de Transmissão: Fator	$g_5(x)$ – Distância de linhas de transmissão em operação (ANEEL, 2018).	Conjunto <i>fuzzy</i> expresso por (1).
$f_6(x)$: Acessibilidade: Fator	$g_6(x)$ – Distância de estradas e vias de acesso (ANEEL, 2018).	Conjunto <i>fuzzy</i> expresso por (1).
$f_7(x)$: Proximidade de corpos hídricos: Fator	$g_7(x)$ – Distância de corpos hídricos (SISEMA, 2020).	Conjunto <i>fuzzy</i> expresso por (1).
$f_8(x)$: Corpos hídricos e pântanos: Restrição	$g_8(x)$ – Presença de corpos hídricos (SISEMA, 2020).	Restrição booleana
$f_9(x)$: Quilombos: Restrição	$g_9(x)$ – Localização de Quilombos (SISEMA, 2020).	Restrição booleana
$f_{10}(x)$: Terras indígenas: Restrição	$g_{10}(x)$ – Localização de terras indígenas (SISEMA, 2020).	Restrição booleana
$f_{11}(x)$: Áreas de Conservação e Proteção Integral (ACPI): Restrição	$g_{11}(x)$ – Localização de ACPIs (SISEMA, 2020).	Restrição booleana
$f_{12}(x)$: Áreas urbanizadas: Restrição	$g_{12}(x)$ – Localização de centros urbanos (SISEMA, 2020).	Restrição booleana

A Tabela 1 apresenta os nomes e tipos de critérios (coluna 01), geocampos utilizados para definição do domínio do conjunto *fuzzy* correspondente (coluna 02) e os modelos aplicados no processo de normalização.

Os critérios relacionados aos potenciais energéticos ($f_1(x)$ e $f_2(x)$) foram normalizados aplicando (4). Os valores *md* utilizados são caracterizados pelos níveis mínimos necessários de radiação solar e velocidade de ventos que viabilizam um projeto, conforme (CEMIG, 2012) (Amarante; Silva; Piá, 2010). Da mesma forma, o critério $f_4(x)$ foi normalizado por (3), considerando que valores de declividade do terreno até 8% são aceitáveis para instalação de usinas solares fotovoltaicas, conforme (CEMIG, 2012). Já os critérios relacionados a distâncias ($f_5(x)$, $f_6(x)$, e $f_7(x)$) foram normalizados pelo uso de (1). Essa expressão utiliza os valores máximo e mínimo do domínio como parâmetros para a normalização. A utilização dessa expressão é pode ser considerada razoável porque pode descrever o comportamento desejado dos critérios (as regiões tornam-se mais atrativas à medida que estão mais próximas das entidades consideradas: LTs, estradas e rios) e não requer o uso de parâmetros fixos. Por exemplo, os autores de (Yushchenko *et al.*, 2017) consideram que regiões localizadas a menos de 1 km das linhas de transmissão são as mais adequadas, de acordo com o critério “Conexão ao sistema de transmissão”. Tendo em conta a grande extensão territorial de Minas Gerais, bem como

do Brasil, o estabelecimento desse tipo de parâmetros, de forma realista, é bastante difícil. Da mesma forma, o critério $f_3(x)$ também foi normalizado pela aplicação da expressão (1), utilizando os valores máximo e mínimo, dada a dificuldade em estabelecer um parâmetro de custo válido para todo o estado.

4.2. Análise multicritério espacial

O primeiro passo para resolver o problema de decisão espacial é a determinação dos pesos de importância dos critérios $v_i, i = 1, \dots, n$. Para isso, considera-se que os membros de um grupo de especialistas $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ expressem as suas preferências relativamente ao conjunto de critérios espaciais descritos na Tabela 1 (critérios do tipo Fator) na perspectiva dos seus níveis de importância individuais. Por exemplo, o especialista e_1 expressou suas preferências usando a seguinte RPM:

$$RPM_{e_1}(f_k(x), f_l(x)) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 5 & 5 & 7 & 7 \\ 1 & 1 & 5 & 5 & 5 & 7 & 7 \\ 1/5 & 1/5 & 1 & 3 & 3 & 5 & 5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/3 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1/5 & 1/5 & 1/3 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1/7 & 1/7 & 1/5 & 1/3 & 1/3 & 1 & 3 \\ 1/7 & 1/7 & 1/5 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

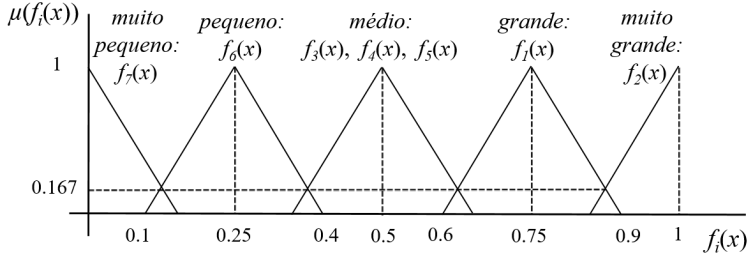
Já o especialista e_2 expressou suas preferências aplicando OC

$$OC_{e_2}(f) = \{f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_5(x), f_4(x), f_6(x), f_7(x)\} \quad (23)$$

O especialista e_3 expressou suas preferências aplicando as EF mostrados na Figura 1, que também reflete as avaliações correspondentes. A utilização de (8) e (9) nessas estimativas permite construir a RPFNR

$$RPFNR_{e_3}(f_k(x), f_l(x)) = \begin{bmatrix} 1 & 0.167 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.167 & 0.167 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.167 & 0.167 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.167 & 0.167 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0.167 & 0.167 & 0.167 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0.167 & 0.167 & 0.167 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Figura 1. Conjunto *fuzzy* set baseado em escalas qualitativas utilizado pelo especialista 3 (e_3)



Para aplicar o método AHP, é necessário converter (23) e (24) para RPMs. Em particular, a aplicação de (11) a (23) permite obter

$$RPM_{e_2}(f_k(x), f_l(x)) = \begin{bmatrix} 1 & 1.442 & 2.080 & 4.327 & 3 & 6.240 & 9 \\ 0.693 & 1 & 1.442 & 3 & 2.080 & 4.327 & 6.240 \\ 0.481 & 0.693 & 1 & 2.080 & 1.442 & 3 & 4.327 \\ 0.333 & 0.481 & 0.693 & 1.442 & 1 & 2.080 & 3 \\ 0.231 & 0.333 & 0.481 & 1 & 1 & 1.442 & 2.080 \\ 0.160 & 0.231 & 0.333 & 0.693 & 0.481 & 1 & 1.442 \\ 0.111 & 0.160 & 0.231 & 0.481 & 0.333 & 0.693 & 1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Ao mesmo tempo, a aplicação de (12) a (24) permite gerar a RPFRA correspondente, que por sua vez pode ser transformada, utilizando (13), em RPM

$$RPM_{e_3}(f_k(x), f_l(x)) = \begin{bmatrix} 1 & 0.160 & 6.236 & 6.236 & 6.236 & 9 & 9 \\ 6.236 & 1 & 6.236 & 6.236 & 6.236 & 9 & 9 \\ 0.160 & 0.160 & 1 & 1 & 1 & 6.236 & 6.236 \\ 0.160 & 0.160 & 1 & 1 & 1 & 6.236 & 6.236 \\ 0.160 & 0.160 & 1 & 1 & 1 & 6.236 & 6.236 \\ 0.111 & 0.111 & 0.160 & 0.160 & 0.160 & 1 & 1 \\ 0.111 & 0.111 & 0.160 & 0.160 & 0.160 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Os autovalores máximos $\lambda_{\max}$ das RPMs (22), (25) e (26) estão próximos de sua dimensionalidade $n = 7$. Assim, pode-se afirmar que tais relações são consistentes (Saaty, 1980), e os vetores individuais gerados pelos autovetores correspondentes (Ramalho *et al.* 2019) são os seguintes:

$$v_{e_1} = [0.331 \ 0.331 \ 0.134 \ 0.068 \ 0.068 \ 0.038 \ 0.028] \quad (27)$$

$$v_{e_2} = [0.331 \ 0.230 \ 0.159 \ 0.110 \ 0.080 \ 0.053 \ 0.037] \quad (28)$$

$$v_{e_3} = [0.259 \ 0.481 \ 0.073 \ 0.073 \ 0.073 \ 0.020 \ 0.020] \quad (29)$$

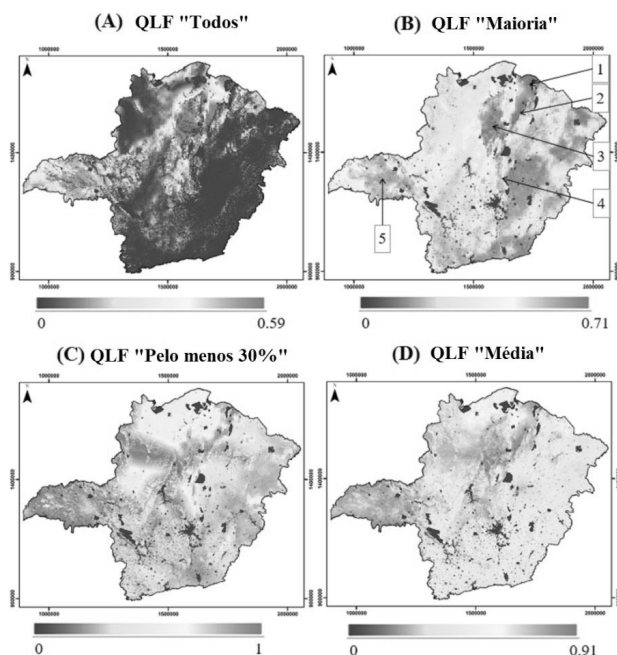
A agregação de (27)-(29) pode ser realizada com o uso do operador OWA (5) baseado no QLF “Todos”. Sua aplicação gera

$$\text{OWA}(v) = [0.259 \ 0.230 \ 0.073 \ 0.068 \ 0.068 \ 0.020 \ 0.020] \quad (30)$$

Assim, o problema de decisão espacial foi resolvido por meio da aplicação do operador OWA (5) de acordo com diferentes abordagens. Os sete critérios do tipo de fator apresentados na Tabela 1 foram agregados para gerar mapas de decisão onde as cinco restrições (Tabela 1) foram levadas em consideração por meio de operações de interseção booleana. A Figura 2 apresenta os mapas de decisão obtidos de acordo com as diferentes abordagens utilizadas, em ordem crescente de compensação entre os critérios, ou seja, variando de uma atitude pessimista (o mapa (A) possui grau zero de compensação entre critérios) até uma atitude com nível médio de compensação (mapa (D)). A faixa de cores utilizada pelos mapas expressam valores dentro do intervalo unitário, que refletem o grau de aptidão das áreas para instalação de SGERs em cada região geográfica. As localidades em tons que variam entre amarelo e vermelho possuem maior aptidão do que aquelas regiões em tons azuis.

Neste estudo, considerou-se que o mapa de decisão apresentado na Figura 2(B) reflete um resultado razoável e, portanto, serviu de base para a definição de 5 (cinco) alternativas de solução, destacas na porção B da figura 2 (Figura 2(B)). Tal mapa foi gerado com a utilização do QLF “Maioria”, definido pela expressão $Q(r) = r^2$ (Vasileiou, Loukogeorgaki, Vagiona 2017). Os pesos dos critérios (30) foram processados, aplicando (7), para gerar os pesos de ordenação $\omega_i, i = 1, \dots, n$.

Figura 2. Resultados da AME de acordo com diferentes abordagens (atitudes de decisão)



4.3. Análise das alternativas de solução

As soluções destacadas na figura anterior pertencem aos seguintes municípios: X_1 - Gameleiras; X_2 - Janaúba; X_3 - São João da Lagoa; X_4 - Santana de Pirapama; X_5 - Prata. Esse conjunto de alternativas foi analisado com a aplicação dos seguintes critérios adicionais: 1) Potencial de biomassa: Cana-de-açúcar (Reis; Reis, 2017); 2) Potencial de biomassa: Silvicultura (Reis; Reis, 2017); 3) Distância das LTs planejadas (LTs que não estão em operação, mas estão previstas no planejamento de expansão do sistema de transmissão do país; essas LTs podem estar em fase de construção ou licitação) (ANEEL, 2018); 4) Risco ambiental (SISEMA, 2020); 5) Integridade da fauna (SISEMA, 2020); e 6) Grau de conservação da vegetação nativa (SISEMA, 2020).

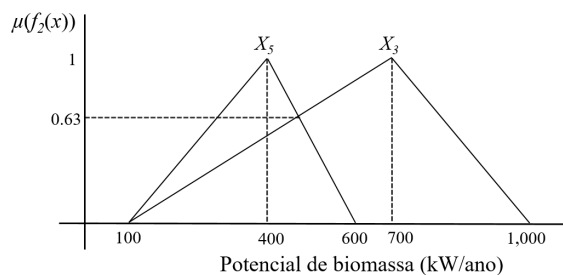
Os critérios adicionais 1, 2 e 3 são de caráter quantitativo e os demais são baseados em mapas qualitativos. A Tabela 2 apresenta as avaliações de cada alternativa de acordo com cada critério adicional considerado. Em particular, os critérios 1 e 2 são avaliados por meio de números *fuzzy* triangulares (cujos intervalos característicos são apresentados pela Tabela 2; a Figura 3 apresenta as estimativas (FPs) para as alternativas do ponto de vista do segundo critério adicional).

Tabela 2. Avaliações das alternativas de solução de acordo com critérios adicionais

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
Potencial de biomassa (kW/ano): Cana de açúcar	0	0	0	0	3,000-7,000-15,000
Potencial de biomassa (kW/ano): Silvicultura	0	0	100-700-1,000	0	100-400-600
Distância de LTs planejadas (km).	30,500	1,400	12,500	14,140	85,200
Risco ambiental	Muito pequeno	Médio	Pequeno	Pequeno	Grande
Integridade da fauna	Médio	Pequeno	Pequeno	Muito grande	Pequeno
Grau de conservação da vegetação nativa	Muito grande	Muito grande	Muito grande	Muito pequeno	Médio

Assim, para o critério adicional 1 é possível construir a seguinte RPFNR

$$\mu_{RPFNR_{c_1}}(X_k, X_l) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Figura 3. FPs para o critério “Potencial de Biomassa – Silvicultura”

A Figura 3 permite aplicar (8) e (9) para construção da seguinte RPFNR:

$$\mu_{RPFNR_{c_2}}(X_k, X_l) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0.63 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

para o segundo critério adicional. Aplicando (16) ao processamento do terceiro critério, é possível obter a RPFRA correspondente. A utilização da função de transformação (17) permite converter tal RPFRA no seguinte RPFNR:

$$\mu_{RPFNR_{c_3}}(X_k, X_l) = \begin{bmatrix} 1 & 0.65 & 0.78 & 0.80 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0.87 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0.85 & 0.98 & 1 & 1 \\ 0.35 & 0 & 0.13 & 0.15 & 1 \end{bmatrix} \quad (33)$$

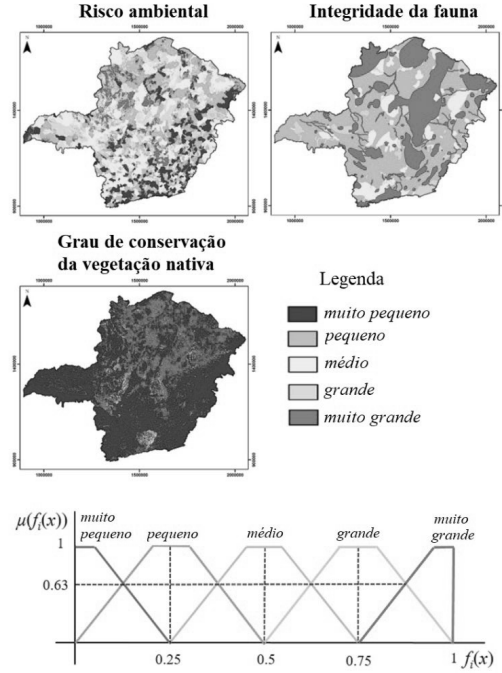
A Figura 4 apresenta os mapas qualitativos e as estimativas (FPs) para as alternativas sob o ponto de vista do quarto, quinto e sexto critérios adicionais. Assim, baseado nas estimativas e aplicando (8) e (9) para minimização, podem-se obter as seguintes RPFNRs:

$$\mu_{RPFNR_{c_4}}(X_k, X_l) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0.63 & 0.63 & 1 \\ 0.63 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.63 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0.63 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$\mu_{RPFNR_{c_5}}(X_k, X_l) = \begin{bmatrix} 1 & 0.63 & 0.63 & 1 & 0.63 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\mu_{RPFNR_{c_6}}(X_k, X_l) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

Figura 4. FPs para os critérios qualitativos espaciais adicionais



Considerando a solução baseada no operador OWA com a utilização do QLF “Tantos quanto possível” (Xu 2005) para seis critérios adicionais. A utilização deste QLF com a aplicação de (6) fornece o seguinte vetor de pesos ordenados:

$$\omega = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.333 \quad 0.333 \quad 0.333] \quad (37)$$

Agora, aplicando (5), é possível obter a seguinte relação de preferência global não recíproca:

$$\mu_{RPFNR_g}(X_k, X_l) = \begin{bmatrix} 1 & 0.76 & 0.47 & 0.60 & 0 \\ 0.67 & 1 & 0.54 & 0.54 & 0 \\ 0.88 & 0.96 & 1 & 0.67 & 0.33 \\ 0.54 & 0.62 & 0.33 & 1 & 0 \\ 0.45 & 0.54 & 0.25 & 0.05 & 1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

Essa relação permite, aplicando (21), obter o seguinte *ranking* global das alternativas:

$$QGDD = [0.24 \quad 0.27 \quad 0.5 \quad 0.16 \quad 0.15] \quad (39)$$

Assim, a aplicação da abordagem proposta gera o seguinte *ranking*: $X_3 > X_2 > X_1 > X_4 > X_5$.

4.4. Estudo comparativo

Atualmente, conforme indicado acima, no estado de Minas Gerais não existem usinas híbridas (no caso considerado, operando simultaneamente com energia solar e eólica). Estudos prospectivos associados à instalação desse tipo de sistema também não foram encontrados na bibliografia correlacionada. Tais fatos dificultam a realização de estudos comparativos para análise e validação dos resultados obtidos no presente Estudo de Caso. Diante disso, optou-se por utilizar as usinas eólicas e solares fotovoltaicas existentes no estado (com potência instalada igual ou superior a 5 MW (ANEEL, 2018)) para avaliar os resultados obtidos, considerando que essas usinas possuem semelhanças com possíveis usinas híbridas baseadas nas mesmas fontes.

Firozjaei *et al.* (2019) utilizaram as usinas de energia solar fotovoltaica existentes no Irã para validar os mapas de decisão obtidos através da AME. Tais autores apresentaram o número de usinas existentes em áreas classificadas pela AME com altos níveis de aptidão como um indicador da qualidade dos resultados gerados. Os níveis de aptidão pertencentes às faixas 0,6 - 0,8 e 0,8 - 1 classificam as áreas como “ótimas” para instalação de usinas solares, de acordo com Firozjaei *et al.* (2019). Considerando que este trabalho utilizou plantas comuns para avaliar os resultados obtidos para plantas híbridas, considerou-se razoável que a faixa 0,4 - 0,6 também seja classificada como uma área “ótima”.

Nesse sentido, a Tabela 3 e a Tabela 4 apresentam os percentuais de usinas existentes por faixas de aptidão para cada um dos mapas de decisão apresentados na Figura 2. Pode-se observar que a presença de usinas nas regiões “ótimas” aumenta à medida que o grau da compensação mútua entre os critérios aumenta. A abordagem menos compensatória apresentada pela Figura 2 (baseada no FLQ “Todas”) apresenta o menor número de usinas existentes em regiões consideradas “ótimas” (Tabela 3 – 26% e Tabela 4 – 33%). A abordagem mais compensatória (baseada no QLF “Média”) apresenta o maior número (Tabela 3 e Tabela 4 – 100%).

Tabela 3. Percentual de plantas solares fotovoltaicas existentes por níveis de aptidão dos mapas de decisão (%)

Níveis de aptidão	Mapas de decisão obtidos de acordo com diferentes abordagens			
	<i>Todos</i>	<i>Maioria</i>	<i>Pelo menos 30%</i>	<i>Média</i>
0 - 0.2	40	1	0	0
0.2 - 0.4	34	41	0	0
0.4 - 0.6	26	43	34	0
0.6 - 0.8	0	15	23	72
0.8 - 1	0	0	43	28

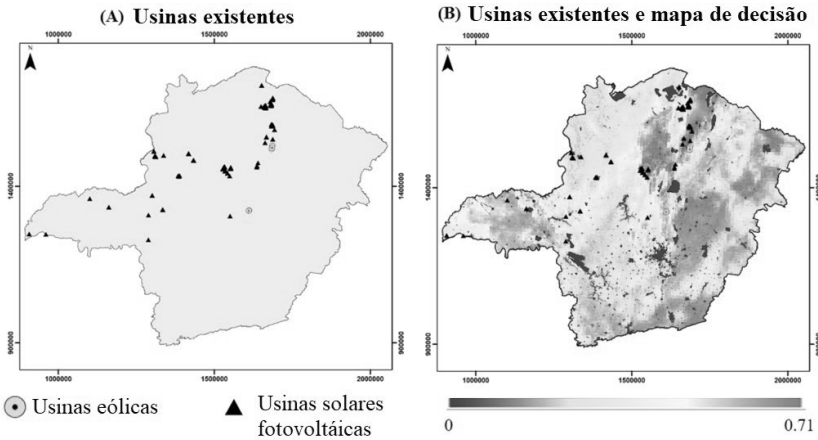
Tabela 4. Percentual de plantas eólicas existentes por níveis de aptidão dos mapas de decisão (%)

Níveis de aptidão	Mapas de decisão obtidos de acordo com diferentes abordagens			
	<i>Todos</i>	<i>Maioria</i>	<i>Pelo menos 30%</i>	<i>Média</i>
0 - 0.2	50	0	0	0
0.2 - 0.4	17	0	0	0
0.4 - 0.6	33	100	67	0
0.6 - 0.8	0	0	0	67
0.8 - 1.0	0	0	33	33

Outro aspecto importante é a capacidade dos mapas de decisão de destacar regiões adequadas e diferenciá-las de regiões que não são adequadas. Nesse sentido, é válido analisar novamente o mapa de decisão da Figura 2(B) agora, juntamente com a distribuição espacial das usinas existentes no Estado (Figura 5(A)). A Figura 5(B) mostra essas usinas e o mapa de decisão obtido pela utilização do QLF “Maioria” (Figura 2(B)). É possível observar que a maioria das usinas existentes está localizada em regiões classificadas com índices mais altos de aptidão (regiões em sombras amarelas/vermelhas).

As usinas existentes estão distribuídas nas regiões Norte, Noroeste e Extremo Oeste do estado. A observação detalhada da Figura 2 permite perceber que essas regiões são classificadas como mais adequadas em todos os mapas de decisão, com suas áreas aumentando à medida que as abordagens se tornam mais compensatórias.

Figura 5. Usinas solares fotovoltaicas e eólicas existentes no Estado de Minas Gerais (potência instalada superior a 5 MW (ANEEL 2018))



5. Discussões

Neste trabalho foram propostas e aplicadas ferramentas metodológicas para consideração de informações de caráter qualitativo ao problema espacial de determinação de alternativas locais para SGERs. Em particular, técnicas para processamento da informação qualitativa na análise de problemas multiobjetivos foram adaptadas para permitirem a realização da avaliação de um conjunto de critérios espaciais de acordo com as opiniões de um grupo de especialistas.

Os resultados desta pesquisa permitem que os especialistas expressem suas preferências em relação aos critérios por meio de diferentes formatos, que são transformados em relações de preferência multiplicativas. Essas relações são processadas aplicando os fundamentos metodológicos do método AHP. Dessa forma, cada especialista gera um vetor das avaliações dos critérios espaciais considerados. O vetor de pesos final é obtido através de agregação baseada no operador OWA. A maioria dos trabalhos semelhantes utilizou o método AHP para uma avaliação individual de critérios espaciais sem processar estimativas de grupo. Vários formatos de preferências de modelagem também não foram utilizados nesses trabalhos.

Após essa etapa, mapas de decisão foram gerados através de diferentes abordagens (baseadas em diferentes QLFs) que expressam diferentes atitudes de decisão. Por fim, os métodos implementados permitiram avaliar, comparar, escolher, priorizar e/ou ordenar alternativas de solução por meio dos modelos $\langle X, R \rangle$ utilizados neste trabalho, pela primeira vez, para consideração de critérios espaciais quantitativos e qualitativos.

Neste trabalho, o operador OWA foi utilizado em três momentos distintos do processo de decisão: 1) agregação de vetores de preferência AHP; 2) AME, e 3) análise dos modelos $\langle X, R \rangle$ (agregação de RPFNRs). A utilização desse operador permite gerar recomendações de acordo com diferentes perfis de aversão ao risco, expressos pelos níveis de compensação dos parâmetros agregados (vetor de preferências, critérios/geocampos ou relações de preferência).

Dessa forma, as escolhas de metodologias e suas combinações permitem considerar uma ampla gama de critérios espaciais (quantitativos e qualitativos) no processo de tomada de decisão, o que pode desempenhar um papel estratégico para investidores em suas decisões.

Com relação ao Estudo de Caso, a Figura 2 permite observar os mapas de decisão obtidos de acordo com diferentes perfis de aversão ao risco. A escolha da abordagem é uma prerrogativa dos decisores e depende de seus conhecimentos, experiências, intuição e níveis de tolerância ao risco. No Estudo Comparativo, pode-se observar que o número de centrais existentes em áreas classificadas pelos mapas de decisão como “ótimas”, aumenta à medida que as abordagens aplicadas se tornam mais compensatórias. Dessa forma, os grandes percentuais de usinas localizadas em regiões com baixos níveis de aptidão nos mapas obtidos pela aplicação do QLF “Todos” (Tabela 3 – 74% e Tabela 4 – 67%) pode ser considerado natural, uma vez que essa é a abordagem mais rigorosa em relação ao risco assumido na decisão (a compensação intercritério é nula). Além disso, usinas comuns (eólica e solar fotovoltaica) foram utilizadas para validar os resultados obtidos para usinas híbridas. Numa abordagem um pouco menos rigorosa e mais

compensatória, caracterizada pelo QLF “Maioria”, o número de plantas em regiões consideradas “ótimas” torna-se mais expressivo (Tabela 3 – 58% e Tabela 4 – 100%). Para abordagens ainda mais compensatórias, esses números tornam-se ainda mais expressivos (Tabela 3 – 100% e Tabela 4 – 100% para os QLFs “Pelo menos 30%” e “Média”).

A capacidade dos mapas de decisão obtidos em destacar regiões adequadas também é importante para avaliar a qualidade dos resultados deste trabalho. A Figura 5(A) apresenta a distribuição espacial das usinas existentes no estado de Minas Gerais e permite observar que elas estão concentradas em regiões classificadas como mais adequadas nas quatro abordagens (Figura 2). Nesse sentido, é possível afirmar que, embora os mapas de decisão obtidos sejam bastante diferentes, há predomínio de áreas mais adequadas para instalação de SGERs nas regiões Norte, Noroeste e Extremo Oeste do estado de Minas Gerais.

As abordagens mais rigorosas (aquelas baseadas nos QLFs “Todos” e “Maioria”) destacam principalmente regiões do Norte e Extremo Oeste do estado, onde se podem encontrar usinas existentes. À medida que aumenta o grau de compensação entre os critérios, as áreas do Noroeste passam a ser mais bem avaliadas e, nessas regiões, também existem usinas. É importante ressaltar que áreas localizadas no Sul do estado, assim como Leste e Nordeste, recebem as avaliações mais baixas na aplicação das quatro abordagens e, ao mesmo tempo, não possuem usinas existentes. Assim, considerando todas essas ocorrências, considera-se que é razoável assumir que existem evidências que corroboram com a qualidade dos mapas de decisão obtidos.

A ordenação final das alternativas aponta que o município de São João da Lagoa é a melhor alternativa para a instalação de SGERs. Contudo, a aplicação de diferentes técnicas de agregação para as RPFNR pode levar a diferentes ordenações das alternativas. Isso deve ser considerado natural e a escolha da técnica é uma prerrogativa dos decisores.

6. Conclusões e desenvolvimentos futuros

Levando em consideração o exposto, a principal contribuição deste trabalho é a adaptação e aprimoramento de técnicas para consideração da informação qualitativa (apresentadas em Ramalho *et al.* (2019) e, mais recentemente, em Ekel, Pedrycz e Pereira Jr. (2020)) de forma a refletir os níveis de importância relativa de critérios de decisão de acordo com diferentes decisores, para análise espacial multiatributo.

Além disso, os modelos $\langle X, R \rangle$ são aqui utilizados pela primeira vez, para o processamento de informações especializadas de caráter quantitativo e qualitativo. O Estudo de Caso também é um aspecto original desta pesquisa e pode fornecer resultados úteis para investidores e governos.

O processo de tomada de decisão proposto é capaz de levar em conta uma ampla gama de critérios relevantes (critérios espaciais quantitativos e qualitativos) para a decisão. Os modelos e métodos que compõem esse processo são de fácil compreensão e reprodução, o que pode ser bastante vantajoso para a resolução de problemas reais.

O Estudo de Caso forneceu mapas de decisão para o estado de Minas Gerais que destacam as regiões mais adequadas para instalação de usinas com utilização simultânea de fontes eólica e solar. A utilização de diferentes QLFs fornece mapas que expressam diferentes atitudes de decisão. Embora os mapas obtidos sejam bastante diferentes, é possível observar que as áreas apontadas como mais adequadas estão localizadas nas regiões Norte, Noroeste e Extremo Oeste do estado.

O Estudo Comparativo fornece algumas evidências convincentes da qualidade dos mapas obtidos, levando em consideração que as centrais eólicas e solares fotovoltaicas existentes estão localizadas, em grande parte, em regiões destacadas como adequadas pelos mapas de decisão obtidos.

A análise das soluções alternativas foi realizada levando em consideração critérios espaciais quantitativos (Potencial de biomassa e Distância das LTs planejadas) e qualitativos (Risco ambiental, Integridade da fauna, Grau de conservação da vegetação nativa) por meio da aplicação dos modelos $\langle X, R \rangle$. A consideração do critério “Potencial de biomassa” pode ser importante nos casos onde os investidores estejam interessados em locais que possam fornecer subsídios para *mix* de geração renovável.

Foi obtida a seguinte ordenação de alternativas: $X_3 > X_2 > X_1 > X_4 > X_5$. Essa ordenação corresponde às premissas metodológicas adotadas. A escolha de diferentes quantificadores linguísticos pode levar a outras ordenações. Isso deve ser considerado natural. A escolha dessas premissas é uma prerrogativa dos decisores.

Finalmente, as avaliações realizadas em ambiente de grupo (para refletir os níveis de importância dos critérios espaciais) foram associadas à agregação baseada no operador OWA, que pode ser considerada uma forma convincente de fornecer uma decisão coletiva. Porém, tal abordagem também pode ser considerada “autoritária” porque não considera níveis de consenso entre os membros do grupo. Nesse sentido, desenvolvimentos futuros deste trabalho podem estar relacionados com a geração de decisões coletivas sob esquemas de consenso para o processo de avaliação dos níveis de importância relativa dos critérios espaciais.

Referências

- ANEEL. **Sistema de informações georreferenciadas do setor elétrico**. Brasília: ANEEL, 2018. Disponível em: <https://sigel.aneel.gov.br/Down/>. Acesso em: 25 out. 2018.
- AL GARNI, H. Z.; AWASTHI, A. Solar PV power plant site selection using a GIS-AHP based approach with application in Saudi Arabia. **Applied Energy**, v. 206, p. 1225-1240, Oct. 2017.
- AL GARNI, H. Z.; AWASTHI, A. Solar PV power plants site selection: A review. In: YAHYAOU, I. (ed.). **Advances in renewable energies and power technologies**: volume 1: solar and wind energies. New York: Elsevier; 2018. p. 57-75.

- ALAMI MERROUNI, A. *et al.* Large scale PV sites selection by combining GIS and analytical hierarchy process: case study: Eastern Morocco. **Renewable Energy**, v. 119, p. 863-873, Oct. 2018.
- ALI, S. *et al.* GIS based site suitability assessment for wind and solar farms in Songkhla, Thailand. **Renewable Energy**, v. 132, p. 1360-1372, Sep. 2018.
- ALY, A.; JENSEN, S. S.; PEDERSEN, A. B. Solar power potential of Tanzania: Identifying CSP and PV hot spots through a GIS multicriteria decision making analysis. **Renewable Energy**, v. 113, p. 159-175, May 2017.
- AMARANTE, O. A. C.; SILVA, F. J. L.; PIÁ, P. E. **Atlas eólico**: Minas Gerais: vol. 1. Belo Horizonte: CEMIG, 2010. Disponível em: http://www.cemig.com.br/pt-br/A_Cemig_e_o_Futuro/inovacao/Alternativas_Energeticas/Documents/atlas%20eolico%20MG.pdf. Acesso em: 25 jun. 2019.
- BRASIL. Ministério de Minas e Energia. Secretaria de Planejamento e Desenvolvimento Energético; EMPRESA DE PESQUISA ENERGÉTICA. **Plano decenal de expansão de energia 2029**. Brasília: MME; EPE, 2020. Disponível em: <https://www.epe.gov.br/sites-pt/publicacoes-dados-abertos/publicacoes/Documents/PDE%202029.pdf>. Acesso em: 10 maio 2020.
- CHICLANA, F. *et al.* A Classification method of alternatives for multiple preference ordering criteria based on fuzzy majority. **J. Fuzzy Mathematics**, v. 4, p. 801-813, Jun. 1997.
- CEMIG. **Atlas solarimétrico de Minas Gerais**: v. 1. Belo Horizonte: CEMIG, 2012.
- COSTA, F. R. *et al.* GIS applied to location of bioenergy plants in tropical agricultural áreas. **Renewable Energy**, v. 153, p. 911-918, Jun. 2020.
- DÍAZ-CUEVAS, P. *et al.* Developing a wind energy potential map on a regional scale using GIS and multi-criteria decision methods: the case of Cadiz (south of Spain). **Clean Technologies and Environmental Policy**, v. 20, n. 6, p. 1167–1183, May 2018.
- DOORGA, J. R. S.; RUGHOOPUTH, S. D. D. V.; BOOJHAWON, R. Multi-criteria GIS-based modelling technique for identifying potential solar farm sites: a case study in Mauritius. **Renewable Energy**, v. 133, p. 1201-1219, Apr. 2019.
- DURBACH, I. N.; STEWART, T. J. Modeling uncertainty in multi-criteria decision analysis. **European Journal of Operational Research**, v. 223, n. 1, p. 1-14, Nov. 2012.
- EKEL, P. I. *et al.* Multiobjective and multiattribute decision making in a fuzzy environment and their power engineering applications. **Information Sciences**, v. 361/362, p. 100-119, Sep. 2016.
- EKEL, P. Y.; PEDRYCZ, W.; PEREIRA JR., J. G. **Multicriteria decision-making under conditions of uncertainty**: a fuzzy set perspective. Hoboken: John Wiley & Sons, 2020.

- EKEL, P. Ya. *et al.* Two-stage multicriteria georeferenced express analysis of new electric transmission line projects. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, v. 108, p. 415-431, Jun. 2019.
- EMATER. **Valor de terra nua (VTN) 2019**. Belo Horizonte: Emater, 2019. Disponível em: http://www.emater.mg.gov.br/portal.do?flagweb=novosite_pagina_interna&id=19167. Acesso em: 10 set. 2019.
- ESRI. **ArcGis 10.2**: version 10.2, 2018. San Diego, California: ESRI, 2018.
- FIROZJAEI, M. K. *et al.* An integrated GIS-based Ordered Weighted Averaging analysis for solar energy evaluation in Iran: current conditions and future planning. **Renewable Energy**, v. 136, p. 1130-1146, Jun. 2019.
- GIAMALAKI, M.; TSOUTSOS, T. Sustainable siting of solar power installations in Mediterranean using a GIS/AHP approach. **Renewable Energy**, v. 141, p. 64-75, Oct. 2019.
- GOODCHILD, M. F. Geographical data modeling. **Computers & Geosciences**, v. 18, n. 4, p. 401-408, May 1992.
- HARVEY, F. **A primer of GIS: fundamental geographic and cartographic concepts**. New York: The Guilford Press, 2008.
- LI, Z. Study of site suitability assessment of regional wind resources development based on multi-criteria decision. **Clean Technologies and Environmental Policy**, v. 20, p. 1147-1166, May 2018.
- MALCKZEWSKI, J.; RINNER, C. **Multicriteria decision analysis in geographic information systems**. New York: Springer, 2015.
- MARQUES-PEREZ, I. *et al.* Territorial planning for photovoltaic power plants using an outranking approach and GIS. **Journal of Cleaner Production**, v. 257, p. 120602, Jun. 2020.
- MORTAZ, E.; VALENZUELA, J. Evaluating the impact of renewable generation on transmission expansion planning. **Electric Power Systems Research**, v. 169, p. 35-44, Apr. 2019.
- MUKHAMEDIEV, R. I. *et al.* Multi-criteria spatial decision making support system for renewable energy development in Kazakhstan. **IEEE Access**, v. 7, p. 122275-122288, Aug. 2019.
- NASA. **Solar GHI polygon global 1 degree NASA 2008**. Paris: Webservice-Energ, 2014. Disponível em: <http://www.webservice-energy.org/record/d5c614c49bac10a42fe212baeab1bc64c319d776/>. Acesso em: 05 Dec. 2018.
- NASA. **Wind polygon 1 degree global NASA 2005**. Paris: Webservice-Energ, 2014. Disponível em: <http://www.webservice-energy.org/record/3a35184ba9e4db24a93c1a04a9e087001d8dcb37/>, Accessed 05 Nov. 2018.

- ORLOVSKI, S. A. **Problems of decision making with fuzzy information**. Nauka: Moscow, 1981. (In Russian).
- ORLOVSKI, S. Decision making with a *fuzzy* preference relation. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 1, n.3, p. 155-167, Jul. 1978.
- PEDRYCZ, W.; EKEL, P. Y.; PARREIRAS, R. O. **Fuzzy multicriteria decision-making: models, methods and applications**. Chichester: John Wiley & Sons, 2011.
- RAMACHANDRA, T. V.; SHURUTHI, B. V. Spatial mapping of renewable energy potential. **Renewable and Sustainable Energy Reviews**, v. 11, n. 7, p. 1460-1480, Dec. 2007.
- RAMALHO, F. *et al.* Multicriteria decision making under conditions of uncertainty in application to multiobjective allocation of resources. **Information Fusion**, v. 49, p. 249-261, Sep. 2019.
- REIS, R. J.; REIS, L. S. (org.). **Atlas de biomassa de Minas Gerais**. Belo Horizonte: Editora Rona, 2017. Disponível em: http://www.cemig.com.br/pt-br/A_Cemig_e_o_Futuro/sustentabilidade/Documents/chamada_publica_CEMIG40/Atlas_Biomassa_Minas_Gerais.pdf. Acesso em: 10 ago. 2019.
- SAATY, T. **The analytic hierarchy process**. New York: McGraw-Hill, 1980.
- SGB-CPRM. **Mapa de declividade em percentual do relevo brasileiro**. Brasília: SGB-CPRM, 2010. Disponível em: <http://www.cprm.gov.br/publique/Gestao-Territorial/Gestao-Territorial/Mapa-de-Declividade-em-Percentual-do-Relevo-Brasileiro-3497.html>. Acesso em: 25 out. 2019.
- SHORABEH, S. N. *et al.* A risk-based multi-criteria spatial decision analysis for solar power plant site selection in different climates: a case study in Iran. **Renewable Energy**, v. 143, p. 958-973, Dec. 2019.
- SISEMA (Minas Gerais). **Infraestrutura de dados espaciais do sistema estadual de meio ambiente e recursos hídricos**. [Belo Horizonte]: IDE-Sisema, 2019. Disponível em: <http://idesisema.meioambiente.mg.gov.br>. Acesso em: 30 jan. 2020.
- TOBLER, W. Measuring spatial resolution. *In*: LAND RESOURCES INFORMATION SYSTEMS CONFERENCE, 1987, Beijing, China. **Proceedings** [...]. Beijing, China: Chinese Academy of Sciences & State Planning Commission, 1987. v. 1, p. 12-16.
- VASILEIOU, M.; LOUKOGEORGAKI, E.; VAGONA, D. G. GIS-based multi-criteria decision analysis for site selection of hybrid offshore wind and wave energy systems in Greece. **Renewable and Sustainable Energy Reviews**, v. 73, p. 745-757, Jan. 2017.
- XU, Z. An overview of methods for determining OWA weights. **International Journal Intelligent Systems**, v. 20, n. 8, p. 843-865, 2005.
- YAGER, R. R. On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics**, v. 8, n. 1, p. 183-190, Jan./Feb. 1988.

YAGER, R. R. Quantifier guided aggregation using OWA operators. **International Journal Intelligent Systems**, v. 11, p. 49-73, Jan. 1996.

YUSHCHENKO, A. *et al.* GIS-based assessment of photovoltaic (PV) and concentrated solar power (CSP) generation potential in West Africa. **Renewable and Sustainable Energy Reviews**, v. 81, pt 2, p. 2088-2103, Jan. 2017.

ZADEH, L. A. Fuzzy sets. **Information and Control**, v. 1, n. 3, p. 338-353, Jun. 1965.

Tomada de decisões espaciais sob incertezas para apoiar a prospecção de locais para sistemas híbridos de geração de energia renovável⁷

Livia Maria Leite Silva, Petr Iakovlevitch Ekel, Douglas Alexandre Gomes Vieira, Matheus Pereira Libório, Marcos Flávio Silveira Vasconcelos D'Angelo

1. Introdução

O aproveitamento eficiente de recursos energéticos renováveis deve ser capaz de levar em consideração diversas características específicas. Em particular, a sua utilização exige lidar com o seu caráter intermitente. Uma forma possível de tratar as descontinuidades da geração é armazenar energia para garantir o fornecimento (Lamadrid, 2015). Contudo, quando se trata de elevados níveis de produção e consumo, tal alternativa torna-se inviável, economicamente. Uma abordagem eficiente para superar esta situação é formar sistemas híbridos de energia renovável (Goodbody *et al.*, 2013). Tais sistemas utilizam duas ou mais fontes de forma combinada. A sua operação pode ter como objetivo atender a demandas estipuladas ou, ocasionalmente, alimentar a rede com algum excedente de energia (Luna-Rubio *et al.* 2012).

Outra característica que deve ser levada em conta relaciona-se ao fato de o potencial energético renovável apresentar uma dispersão espacial irregular ao longo do globo terrestre, determinada pela disponibilidade de recursos naturais. Frequentemente, apesar da ocorrência de potencial energético significativo em determinadas áreas, podem existir fatores restritivos à instalação de centrais de geração, como, por exemplo, a obrigação de salvaguardar o patrimônio ambiental ou cultural (Aydin; Kentel; Duzgun 2013). Além disso, no processo de análise dos locais adequados é necessário priorizar os projetos seguindo um amplo conjunto de considerações, incluindo os objetivos estratégicos de governos e de investidores.

Assim, dadas as considerações anteriores, a escolha de uma matriz de geração eficiente, bem como do local mais adequado à recepção de uma planta de geração renovável, exige um cuidadoso processo de tomada de decisão. Nesse sentido, o presente trabalho visa apoiar as pessoas responsáveis pela decisão nos processos de avaliação, comparação, escolha, priorização e/ou ordenação de alternativas locais para geração em condições de incerteza. Em particular, a principal contribuição deste trabalho é a adaptação e aperfeiçoamento dos modelos e métodos propostos em trabalhos recentes (Ekel *et al.*, 2019; Ekel; Pedrycz; Pereira Jr., 2020) para o problema de definição de alternativas locais para a recepção de plantas de produção de energia renovável, levando em conta suas características de complementaridade em seus perfis de disponibilidade sazonal.

O processo de decisão inicia-se com o levantamento dos critérios espaciais quantitativos relevantes para a decisão. Com a utilização dos chamados Sistemas de

⁷ **Reconhecimento:** A versão de registro deste artigo está publicada na *Energies*, e está disponível em: <https://doi.org/10.3390/en16134880>.

SILVA, L. M. L. *et al.* Spatial Decision-Making under Uncertainties for Supporting the Prospection of Sites for Hybrid Renewable Energy Generation Systems. *Energies*, v. 16, n. 13, p. 4880, 2023.

Informações Geográficas (SIGs), esses critérios podem ser modelados e empregados em conjunto com modelos de Análise Multicritério, caracterizando a chamada Análise Multicritério Espacial (AME) (Malczewski; Rinner 2015). Ao utilizar esse tipo de ferramenta, as zonas de exclusão podem ser identificadas com base nos critérios restritivos correspondentes (Cradden *et al.*, 2016). A adequação da área restante pode ser avaliada de acordo com um segundo conjunto de critérios. Tal ferramenta de apoio à decisão permite a construção de mapas que destacam a adequação relativa dos locais para a instalação de centrais elétricas. Além disso, esta abordagem permite aplicar a teoria dos conjuntos *fuzzy* ao processo de normalização dos critérios considerados. Assim, é necessária a construção de um modelo baseado em conjuntos *fuzzy*, definidos em domínios de informação georreferenciados. Esse modelo deverá incluir parâmetros e opções de operações de agregação a serem escolhidas de acordo com as preferências dos DMs (Silva *et al.*, 2020, Silva, 2020).

Neste trabalho, a regra de decisão utilizada baseia-se na aplicação do operador S-OWA (Yager; Filev 1994) que permite criar mapas de decisão (a utilização do operador S-OWA está associada ao ajuste dos parâmetros de otimismo e pessimismo). Essa estratégia é complementada pela aplicação da abordagem possibilística para considerar o fator incerteza. Conforme proposto e discutido em (Pereira Jr.; 2015), isso é realizado dentro do esquema geral de tomada de decisão multiobjetivo sob incertezas. Esse esquema baseia-se na construção de matrizes de *payoff* e na aplicação dos critérios de escolha da abordagem clássica (Wald; Laplace; Savage; Hurwicz) como funções objetivo para analisar essas matrizes a fim de obter soluções multiobjetivos robustas (Pereira Jr., 2015; Ramalho, 2019; Ekel; Pedrycz; Pereira Jr., 2020).

A análise, realizada até o presente momento, poderá indicar soluções alternativas que, do ponto de vista formal, podem ser indistinguíveis. Além disso, o decisor pode estar interessado em avaliar as alternativas de solução destacadas sob o ponto de vista de considerações adicionais, que podem ser refletidas pelo uso de informações quantitativas e/ou qualitativas. Nesse sentido, técnicas de tomada de decisão multiatributos podem ser empregadas na avaliação, comparação, escolha, priorização e/ou ordenação de alternativas de solução. Essas técnicas baseiam-se na modelagem de preferências *fuzzy* (Pedrycz; Ekel; Parreiras 2011; Ramalho *et al.*, 2019; Ekel; Pedrycz; Pereira Jr., 2020). Reconhecendo que qualquer critério ou qualquer decisor pode exigir formatos variados para a representação de preferências (Delgado, 1998; Herrera; Martinez; Sanchez, 2005; Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011), é necessário usar funções de transformação (por exemplo, Delgado *et al.*, 1998; Herrera; Martinez; Sanchez, 2005; Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011), permitindo a redução de diferentes formatos de preferência a Relações de Preferência *Fuzzy* Não Recíprocas (RPFNR) (Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011). Isso fornece informações homogêneas para a tomada de decisões que podem ser processadas no âmbito dos modelos correspondentes (Ekel *et al.*, 2016; Ramalho *et al.*, 2019; Ekel; Pedrycz; Pereira Jr., 2020).

Os modelos e métodos empregados nesta pesquisa tratam do fator incerteza de acordo com a classificação dada por Durbach e Stewart (2012). Esses autores reconhecem duas classes de incertezas: as incertezas externas, que são determinadas por condições ambientais que fogem ao controle dos decisores, e as incertezas internas, que estão

relacionadas aos valores e julgamentos individuais de cada decisor. Da mesma forma, Malczewski e Rinner (2015), Hassan, Garni e Awasthi (2018) destacam que ao considerar muitos critérios espaciais, as principais fontes de incertezas estão associadas aos pesos dos critérios (que indicam as preferências dos decisores, ou seja, incertezas internas) e os valores dos critérios (ou seja, incertezas externas).

A consideração das incertezas internas e externas e a possibilidade de utilizar as preferências de decisores são características cruciais na análise de problemas locais, notadamente aqueles relacionados à geração renovável, uma vez que esta área é geralmente vista como um negócio de risco, que envolvem investimentos iniciais significativos e longos períodos de retorno (Simister *et al.*, 2014). Reconhecendo isso, é proposta uma abordagem para apoiar estudos prospectivos, que podem levar em conta modelos de negócios e objetivos estratégicos, fornecendo recomendações abrangentes e robustas sobre novos locais. Além disso, a versatilidade da análise proposta torna-a adequada para apoiar as decisões de diferentes participantes do setor energético, como governos, investidores ou grandes consumidores de energia interessados na expansão dos sistemas energéticos para seu abastecimento.

É bastante comum a utilização de modelos de AME, bem como outros modelos de tomada de decisão, com o objetivo de determinar alternativas locais para geração renovável (Asakereh *et al.*, 2014; Camargo; Zink; Dorner, 2015; Tahria; Hakdaoui; Maanan, 2015; Latinopoulos; Kechagia, 2015; Wang; Sung; Hsu, 2016; Vasileiou; Loukogeorgaki; Vagiona, 2017; Amirinia; Mafi; Mazaheri, 2017; Ghorbani; Makian; Breyer, 2019). Contudo, em geral, os trabalhos correlacionados não tratam sistematicamente as incertezas internas e externas. Além disso, esses trabalhos também não fornecem mecanismos para considerar critérios qualitativos espaciais, que podem desempenhar um papel vital no planejamento estratégico de investidores e governos.

Outra importante contribuição desta pesquisa é a realização de um estudo de caso relacionado à seleção de locais para geração renovável no estado de Minas Gerais, Brasil. Aqui, as fontes de energia renováveis são representadas pelas eólicas e solares fotovoltaicas. Existem publicações relacionadas ao levantamento do potencial de geração de energia dessas fontes neste Estado (Amarante, 2010; Reis; Tiba, 2016). No entanto, essas publicações não refletem qualquer consideração de aspectos relacionados com o potencial de complementaridade existente entre essas fontes. Atualmente, Minas Gerais não possui plantas híbridas baseadas nessas duas fontes instaladas ou em operação. Assim, os mapas de decisão obtidos foram analisados de acordo com as usinas solares fotovoltaicas e eólicas existentes no estado, com o intuito de avaliar a qualidade dos resultados da AME.

É importante salientar que os modelos e métodos empregados têm uma natureza flexível e podem ser estendidos para lidar com outras fontes de energia renováveis e diferentes estratégias de hibridização, bem como outros problemas espaciais.

2. Processo de decisão aplicado à prospecção de alternativas locais para plantas híbridas

2.1. Identificação dos critérios espaciais relevantes para a decisão

Em trabalhos relacionados são aplicados alguns critérios comuns: potencial energético renovável, distância de sistema de transmissão, distância de estradas, distância e presença de centros urbanos, declividade do relevo, valor econômico do terreno, uso do solo, presença de matas e florestas, presença de Unidades de Conservação (UCs) e florestas públicas, presença de corpos d'água (Amarante, 2010; Asakereh *et al.*, 2014; Tahria; Hakdaoui; Maanan, 2015; Latinopoulos; Kechagia, 2015; Camargo; Zink; Dorner, 2015; Wang; Sung; Hsu, 2016; Reis; Tiba, 2016; Amirinia; Mafi; Mazaheri, 2017; Vasileiou; Loukogeorgaki; Vagiona, 2017; Ghorbani; Makian; Breyer, 2019).

Com relação ao critério “potencial energético renovável”, o presente trabalho possui uma particularidade, caracterizada pelo objetivo de avaliar a distribuição espacial do potencial energético renovável considerando a complementaridade temporal entre duas fontes – solar fotovoltaica e eólica.

Nesse sentido, a complementaridade temporal refere-se a fontes cujas flutuações sazonais da disponibilidade se complementam ao longo de um determinado horizonte temporal (Bagatini *et al.*, 2017). Considerando que alguns recursos renováveis podem ter um perfil complementar ao longo de um período, geralmente um ano, os autores de (Beluco; Souza; Krezinger, 2008) propõem um índice adimensional para avaliar a complementaridade entre duas fontes de energia. Esse índice baseia-se em três componentes, considerados no mesmo horizonte temporal, e assume valores entre 0 e 1, onde valores mais próximos de 1 indicam maior potencial de complementaridade. Os três componentes são descritos a seguir (de acordo com Beluco; Souza; Krezinger, 2008; Bagatini *et al.*, 2017; Pianezzola; Krenzinger; Canales, 2017; Jurasz *et al.*, 2020):

1. Índice parcial de complementaridade temporal

$$I_{\text{time}} = \frac{|d_{1i} - d_{2i}|}{\sqrt{|D_{1i} - d_{1i}| |D_{2i} - d_{2i}|}} \quad (1)$$

permite avaliar o intervalo de tempo entre os valores mínimos de disponibilidade de duas fontes. Se esse intervalo for metade do período considerado, $I_{\text{time}} = 1$. Se os mínimos coincidirem, $I_{\text{time}} = 0$.

Em (1), D_{1i} e D_{2i} são os números de dias de disponibilidade energética máxima das fontes 1 e 2, respectivamente, d_{1i} e d_{2i} são os números de dias de disponibilidade energética mínima das fontes 1 e 2, respectivamente, para a i -ésima localidade e no período de tempo considerado. Se as diferenças forem iguais a meio período, (1) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$I_{\text{time}} = \frac{|d_{1i} - d_{2i}|}{\sqrt{|180 - d_{1i}| |180 - d_{2i}|}} = \frac{|d_{1i} - d_{2i}|}{180} \quad (2)$$

2. Índice parcial de complementaridade energética

$$I_{\text{energy}} = 1 - \frac{|E_{1i} - E_{2i}|}{|E_{1i} + E_{2i}|} \quad (3)$$

avalia a relação entre os valores médios de disponibilidade energética das fontes. Se os valores médios forem iguais, $I_{\text{energy}} = 1$. Se esses valores forem diferentes, o índice deverá ser menor e tende a zero à medida que as diferenças aumentam. Em (3), E_{1i} e E_{2i} são a energia total disponível pelas fontes 1 e 2 no período avaliado, na i -ésima localidade.

3. Índice parcial de complementaridade de amplitude

$$I_{\text{amplitude}} = \begin{cases} \left[1 - \frac{(\delta_{1i} - \delta_{2i})^2}{(1 - \delta_{2i})^2} \right], & \text{if } \delta_{1i} \leq \delta_{2i} \\ \left[\frac{(1 - \delta_{2i})^2}{(1 - \delta_{2i})^2 + (\delta_{1i} - \delta_{2i})^2} \right], & \text{if } \delta_{1i} \geq \delta_{2i} \end{cases} \quad (4)$$

vem de uma manipulação adequada entre os parâmetros δ_{1i} e δ_{2i} , que são definidos como

$$\delta_i = 2 - \frac{E_{d \min i}}{E_{d \max i}} \quad (5)$$

onde $E_{d \min i}$ e $E_{d \max i}$ são as disponibilidades energéticas diárias máxima e mínima de cada fonte avaliada, no período de tempo considerado, para a i -ésima localidade.

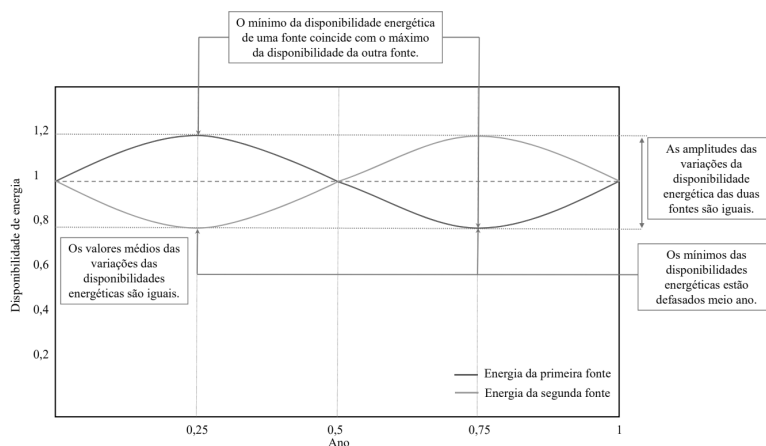
Esse índice avalia a relação entre os valores do mínimo e do máximo das duas funções de disponibilidade de energia. Se a razão entre os valores de disponibilidade mínima e máxima da fonte 1 for igual à fonte 2 (neste caso $\delta_{1i} = \delta_{2i} = 1$), o índice (4) será igual a 1. Se esses valores forem diferentes, o índice deverá ser menor e tender a zero à medida que as diferenças aumentem.

Finalmente, o índice de complementaridade total pode ser obtido como

$$I_{\text{total}} = I_{\text{time}} I_{\text{energy}} I_{\text{amplitude}} \quad (6)$$

Em particular, a Figura 1 (Beluco; Souza; Krenzinger, 2008) ilustra duas funções que simulam o comportamento da disponibilidade de energia de duas fontes perfeitamente complementares (hipotéticas), ou seja, com $I_{\text{total}} = 1$.

Figura 1. Perfis de disponibilidade de energia perfeitamente complementares. Adaptado de Beluco *et al.* (2008)



2.2. Análise Multicritério Espacial (AME) em ambiente fuzzy

A AME combina diferentes modelos e métodos de análise de muitos critérios com a capacidade dos SIGs de armazenamento, processamento e visualização de dados. Já os modelos existentes para a tomada de decisão multicritério incluem um conjunto complexo de técnicas e procedimentos que visam avaliar, comparar, escolher, priorizar e/ou ordenar soluções alternativas, considerando julgamentos fornecidos por um ou um grupo de especialistas, de acordo com múltiplos critérios que, geralmente, são conflitantes (Malczewski; Rinner 2015; Abdullahi *et al.*, 2015; Ekel; Pedrycz; Pereira Jr., 2020). Existem dois tipos principais de critérios:

- fatores: correspondem a regras de julgamento que podem não ser totalmente satisfeitas. Esse tipo de critério é utilizado para identificar, dentro do conjunto de soluções viáveis, aquelas que melhor correspondem às preferências do decisor;
- restrições: são regras de julgamento rigorosas que podem ser empregadas para excluir, do conjunto de soluções viáveis, as soluções candidatas que não satisfazem tais condições.

Ambos os tipos de critérios podem ser representados através de conjuntos *fuzzy* (Zadeh, 1965). Um conjunto *fuzzy* é caracterizado por uma Função de Pertinência (FP) $\mu: U \rightarrow [0,1]$ que associa cada objeto de interesse pertencente ao universo do discurso U a um valor que reflete o nível de sua pertinência ao conjunto *fuzzy*. Esse nível varia de 0, que significa total falta de pertinência/adesão, a 1, que significa adesão plena (Zadeh, 1965).

Na tomada de decisões espaciais, as informações georreferenciadas (Goodchild, 1992) podem ser descritas por geo-objetos (representação vetorial) e geocampos (representação matricial). Em particular, os geocampos representam o espaço geográfico como uma superfície contínua, que é dividida numa grelha regular de células, onde são

descritos os fenômenos de interesse. De acordo com essa representação, a variável espacial considerada em um modelo pode ser definida como $x = (x_1, x_2)$, onde x_1 e x_2 correspondem às dimensões de longitude e latitude, respectivamente. Os conjuntos *fuzzy* podem ser considerados como geocampos que descrevem cada localização como um valor na faixa de 0 a 1, através das FPs. Esse valor indica o grau em que o local atende a determinado critério de decisão. O mapeamento correspondente depende dos atributos de cada localidade, que são refletidos pelos geocampos de dados $g_i(x)$, $i = 1, \dots, m$.

Assim, para criar conjuntos *fuzzy* $A_i(x)$, $i = 1, \dots, m$ com FPs $\mu_{A_i}(g_i(x))$, $i = 1, \dots, m$, refletindo o grau de pertinência aos critérios de decisão, a correlação

$$\mu_{A_i}(g_i(x)) = \frac{\max g_i(x) - g_i(x)}{\max g_i(x) - \min g_i(x)} \quad (7)$$

pode ser empregada para critérios que devem ser minimizados, ou a correlação

$$\mu_{A_i}(g_i(x)) = \frac{g_i(x) - \max g_i(x)}{\max g_i(x) - \min g_i(x)} \quad (8)$$

pode ser usada para critérios que devem ser maximizados (Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011; Ekel; Pedrycz; Pereira Jr., 2020). Outras correlações, por exemplo (ESRI, 2018), também podem ser empregadas para construir os conjuntos *fuzzy*. Por exemplo,

$$\mu_{A_i}(g_i(x)) = \frac{1}{1 + \left(\frac{g_i(x)}{md}\right)^{-sp}} \quad (9)$$

pode ser usado para critérios a serem maximizados, enquanto

$$\mu_{A_i}(g_i(x)) = \frac{1}{1 + \left(\frac{g_i(x)}{md}\right)^{sp}} \quad (10)$$

pode ser aplicado para critérios de minimização. Os parâmetros s e p estão relacionados ao *spread* e ao ponto médio, respectivamente, das FPs. A escolha das expressões que melhor descrevem os critérios analisados é uma prerrogativa dos decisores.

O conjunto de localizações viáveis pode ser delineado pelos conjuntos *fuzzy* correspondentes às restrições. Frequentemente, locais com nível de pertinência igual a zero são considerados alternativas inviáveis, ou seja: refletem as restrições impostas ao problema de decisão.

Quando vários critérios devem ser considerados, múltiplos conjuntos *fuzzy* $A_i(x)$, $i = 1, \dots, m$ são construídos e uma função de agregação $h: [0,1]^m \rightarrow [0,1]$ pode ser aplicada para gerar um conjunto *fuzzy* denominado decisão *fuzzy*, que pode ser apresentado da seguinte forma (Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011):

$$A_D(x) = h(A_1(x), \dots, A_m(x)) \quad (11)$$

O operador *Ordered Weighted Averaging* (OWA) (Yager, 1988) pode ser usado para implementar (11). Para um determinado conjunto de critérios ou geocampos (conjuntos *fuzzy*), o operador OWA associa um vetor de pesos $\omega_1, \dots, \omega_m$ ($\omega_j \in [0,1]$ e $\sum_{j=1}^m \omega_j = 1$) à i -ésima localização. Esse operador permite a realização de uma família de procedimentos de agregação multicritério (Yager 1988; 1993; 1996). Portanto, a expressão (11) pode ser reescrita como:

$$A_D(x) = \text{OWA}(A_1(x), \dots, A_m(x)) = \sum_{j=1}^m \omega_j c_j \quad (12)$$

onde c_j é o j -ésimo elemento mais alto de $A_i(x)$, $i = 1, \dots, m$.

Existem diversas versões do operador OWA que diferem nos métodos de determinação dos pesos de ordenação, conforme discutido em Xu (2005). Neste trabalho, utilizou-se o operador *S-OWA* (*Slide OWA*) (Yager 1993) que permite modelar o nível de otimismo/pessimismo dos decisores. Os pesos do operador *S-OWA* são definidos como:

$$\omega_j = \begin{cases} \frac{1}{m}(1 - (\alpha + \beta)) + \alpha, & j = 1 \\ \frac{1}{m}(1 - (\alpha + \beta)), & j = 2, \dots, m-1 \\ \frac{1}{m}(1 - (\alpha + \beta)) + \beta, & j = m \end{cases} \quad (13)$$

onde $\alpha, \beta \in [0,1]$ e $\alpha + \beta \leq 1$. O parâmetro α é o grau de otimismo a ser considerado e β é o grau de pessimismo.

2.3. Tratamento da incerteza dos dados iniciais com base na abordagem possibilística

A abordagem clássica para lidar com a incerteza dos dados (Luce; Raiffa, 1957; Belyaev, 1977) é generalizada em (Ekel; Martini; Palhares, 2008; Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011) para resolver problemas multicritério, e aprimorada em (Pereira *et al.*, 2015; Ekel; Pedrycz; Pereira Jr., 2020). Assim, neste trabalho, os resultados dos autores Pereira *et al.* (2015) e Ekel, Pedrycz e Pereira Jr. (2020) são aplicados ao problema de localização em questão.

Utilizando diferentes combinações de alternativas de solução X_k , $k = 1, \dots, K$ e cenários Y_s , $s = 1, \dots, S$, os resultados de Pereira *et al.* (2015) e Ekel, Pedrycz e Pereira Jr. (2020) podem ser aplicados para construir matrizes *payoff* quantificando efeitos $F(X_k, Y_s)$.

As seis primeiras colunas da Tabela 1 formam uma matriz de *payoff* (Pereira *et al.*, 2015; Ekel; Pedrycz; Pereira Jr., 2020) e o número de critérios considerados do tipo de fator definem a quantidade total de matrizes de *payoff*.

Tabela 1. Matriz de *payoff*

	Y_1	...	Y_s	...	Y_S	F^{min_k}	F^{max_k}	$\bar{F}(X_k)$	R^{max_k}
X_1	$F(X_1, Y_1)$	...	$F(X_1, Y_s)$	...	$F(X_1, Y_S)$	F^{min_1}	F^{max_1}	$\bar{F}(X_1)$	R^{max_1}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
X_k	$F(X_k, Y_1)$	...	$F(X_k, Y_s)$	...	$F(X_k, Y_S)$	F^{min_k}	F^{max_k}	$\bar{F}(X_k)$	R^{max_k}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
X_K	$F(X_K, Y_1)$	...	$F(X_K, Y_s)$	...	$F(X_K, Y_S)$	F^{min_K}	F^{max_K}	$\bar{F}(X_K)$	R^{max_K}

2.4. Construção dos cenários (ou estados de natureza)

Possíveis situações futuras podem ser refletidas através de cenários (também conhecidos como combinações representativas de dados iniciais ou estados da natureza).

Existem várias abordagens utilizadas para a construção de cenários (Ram; Montibeller, 2013; Sabera *et al.*, 2019). A técnica das chamadas sequências LP τ é explorada em (Ekel; Martini; Palhares, 2008; Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011; Pereira *et al.*, 2015; Ramalho *et al.*, 2019; Ekel; Pedrycz; Pereira Jr., 2020), uma vez que possuem características de uniformidade superiores entre outras sequências uniformemente distribuídas (ver Sobol (1979) para mais detalhes e uma descrição de como construir sequências LP τ).

Em essência, essas sequências fornecem pontos $Q_s, s = 1, \dots, S$ (S é o número de cenários) com coordenadas $q_{st}, s = 1, \dots, S, t = 1, \dots, T$ no hipercubo unitário Q^T correspondente, onde T é um número de critérios do tipo fator sob incerteza (Pereira *et al.* 2015). A construção de cenários se reduz à seleção de pontos de uma sequência uniformemente distribuída em Q^T e sua transformação no hipercubo C^T definido pelos limites inferior e superior c'_t e c''_t para os intervalos de incerteza correspondentes da seguinte forma:

$$c_{st} = c'_t + (c''_t - c'_t)q_{st}, \quad s = 1, \dots, S, t = 1, \dots, T \quad (14)$$

Para mais exemplos relativos a sequências LP τ , consulte (Pereira *et al.*, 2015; Ekel; Martini; Palhares, 2008).

2.5. Critérios de escolha e a modificação da abordagem clássica

Para analisar as matrizes *payoff* e escolher alternativas de solução racionais, são utilizados os critérios de escolha. Este trabalho aplica estimativas características, que são utilizadas na construção dos critérios de escolha de Wald, Laplace, Savage e Hurwicz da abordagem clássica (Luce; Raiffa, 1957; Belyaev, 1977).

Em particular, para cada linha (solução alternativa) da matriz *payoff* (Tabela 1), os critérios de escolha de Wald, Laplace, Savage e Hurwicz baseiam-se nas seguintes estimativas características:

$$F^{min_k}_{1 \leq s \leq S}, F^{max_k}_{1 \leq s \leq S}, \bar{F}(X_k) = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S F(X_k, Y_s), \text{ e } R^{max_k}_{1 \leq s \leq S}.$$

Para avaliar o nível máximo de risco $R^{\max}(X_k)$, é necessário utilizar o valor mínimo do critério $F^{\min_s \min_{1 \leq k \leq K} k_s}$ (para um caso de minimização) ou $F^{\max_s \max_{1 \leq k \leq K} k_s}$ (para um caso de maximização) para cada coluna (cenário) da matriz *payoff* (Luce; Raiffa, 1957; Belyaev, 1977; Ekel; Martini; Palhares, 2008):

$$R(X_k, Y_s) = F(X_k, Y_s) - F^{\min_s} \quad (15)$$

para critérios minimizados e

$$R(X_k, Y_s) = F^{\max_{s k_s}} \quad (16)$$

para critérios maximizados.

As estimativas características indicadas acima são apresentadas na Tabela 1 (7ª a 10ª colunas).

Pereira *et al.* (2015) e Ekel *et al.* (2020) justificam a consideração das estimativas características como funções objetivo para o p -ésimo critério:

$$F_p^W(X_k) = F_p^{\max_k \max_{1 \leq s \leq S} p_{k_s}} \quad (17)$$

$$F_p^L(X_k) = \overline{F}_p(X_k) = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S F_p(X_k, Y_s) \quad (18)$$

$$F_p^S(X_k) = R_p(X_k) = \max_{1 \leq s \leq S} R_p(X_k, Y_s) \quad (19)$$

$$F_p^H(X_k) = \alpha F^{\max_{k p} \min_{1 \leq s \leq S} p_{k_s} \min_{1 \leq s \leq S} p_{k_s}} \quad (20)$$

Em (20), $\alpha \in [0,1]$ é o índice “pessimismo-otimismo” definido pelo DM. É recomendado em Belyaev (1977) usar valores de α entre 0,5 e 1.

Como dito anteriormente, a existência de m critérios do tipo fator exigem a construção de m matrizes *payoff*.

As matrizes m com as estimativas dos critérios de escolha podem ser obtidas utilizando os resultados de Pereira *et al.* (2015) e Ekel, Pedrycz e Pereira Jr. (2020), conforme mostrado na Tabela 2. Elas indicam o desempenho de cada alternativa de solução refletido pelos critérios de escolha de Wald, Laplace, Savage e Hurwicz.

Tabela 2. Matriz de estimativas de critérios de escolha para os p -ésimos critérios do tipo de fator

	$F_p^W(X_k)$	$F_p^L(X_k)$	$F_p^S(X_k)$	$F_p^H(X_k)$
X_1	$F_p^W(X_1)$	$F_p^L(X_1)$	$F_p^S(X_1)$	$F_p^H(X_1)$
...	...	...	...	...
X_k	$F_p^W(X_k)$	$F_p^L(X_k)$	$F_p^S(X_k)$	$F_p^H(X_k)$
...	...	...	...	...
X_K	$F_p^W(X_K)$	$F_p^L(X_K)$	$F_p^S(X_K)$	$F_p^H(X_K)$
	$\min_{1 \leq k \leq K} F_p^W(X_k)$	$\min_{1 \leq k \leq K} F_p^L(X_k)$	$\min_{1 \leq k \leq K} F_p^S(X_k)$	$\min_{1 \leq k \leq K} F_p^H(X_k)$
	$\max_{1 \leq k \leq K} F_p^W(X_k)$	$\max_{1 \leq k \leq K} F_p^L(X_k)$	$\max_{1 \leq k \leq K} F_p^S(X_k)$	$\max_{1 \leq k \leq K} F_p^H(X_k)$

As informações fornecidas na Tabela 2 podem ser usadas para construir m problemas multicritério, incluindo quatro ou menos funções objetivo (dependendo do número de critérios de escolha considerados) como segue:

$$F_{e,p}(X) \rightarrow \text{ext}, \quad e = 1, \dots, E \leq 4, p = 1, \dots, m \quad (21)$$

onde $F_{1,p}(X) = F_p^W(X_k)$, $F_{2,p}(X) = F_p^L(X_k)$, $F_{3,p}(X) = F_p^S(X_k)$, e $F_{4,p}(X) = F_p^H(X_k)$.

Para resolver o problema (21), é possível aplicar a abordagem Bellman-Zadeh à tomada de decisão em um ambiente *fuzzy* (Bellman; Zadeh, (1970) aplicada à análise de modelos multiobjetivos (Pereira *et al.*, 2015; Ekel *et al.*, 2020). As vantagens de seu uso são discutidas em (Pedrycz *et al.*, 2011). Em particular, essa abordagem proporciona a observância do princípio do resultado garantido e produz linhas construtivas para a obtenção de soluções harmoniosas (Ekel, 2001; 2002). O conceito de otimização, ao utilizar essa abordagem, baseia-se no grau máximo de implementação de todos os objetivos.

Para empregar a abordagem Bellman-Zadeh, as funções objetivo de interesse $F_p(X)$, $p = 1, \dots, m$ são modeladas por conjuntos *fuzzy* $A_p = \{X, \mu_{A_p}(X)\}$, $X \in L$, $p = 1, \dots, m$ onde $\mu_{A_p}(X)$ é a FP de A_p . Uma solução *fuzzy* D é definida (Ekel, 2001; 2002) como $D = \bigcap_{p=1}^q A_p$ com FP:

$$\mu_D(X) = \min_{1 \leq p \leq m} \mu_{A_p}(X), \quad X \in L \quad (22)$$

Assim, o seguinte problema pode ser gerado:

$$\max \mu_D(X) = \max_{X \in L} \min_{1 \leq p \leq m} \mu_{A_p}(X) \quad (23)$$

cujas solução é

$$X^0 = \arg \max_{X \in L} \min_{1 \leq p \leq m} \mu_{A_p}(X) \quad (24)$$

Para obter (24), é necessário construir as FP $\mu_{A_p}(X)$, $p = 1, \dots, m$ que refletem o grau de pertinência das alternativas $F_p(X)$, $X \in L$, $p = 1, \dots, m$ ao conjunto solução. Isso pode ser alcançado aplicando (7) e (8) (Ekel, 2001; 2002), obtendo-se, assim, as matrizes modificadas dos critérios de escolha.

As m matrizes modificadas das estimativas dos critérios de escolha baseiam-se nas m matrizes das estimativas dos critérios de escolha, tendo uma forma geral semelhante à Tabela 2.

Nas matrizes modificadas, aplicando a expressão (7), as estimativas F_p^W , F_p^L , F_p^S , e F_p^H são substituídas, respectivamente, pelos valores de pertinência $\mu_{A_p}^W(X_k)$, $\mu_{A_p}^L(X_k)$, $\mu_{A_p}^S(X_k)$, e $\mu_{A_p}^H(X_k)$. Portanto, a disponibilidade de m matrizes modificadas das estimativas dos critérios de escolha pode ser usada para construir a matriz agregada das estimativas dos critérios de escolha. A matriz *payoff* agregada também tem a mesma forma geral da Tabela 2, onde as estimativas F_p^W , F_p^L , F_p^S , e F_p^H são substituídas, respectivamente, pelos valores agregados de pertinência, $\mu_D^W(X_k)$, $\mu_D^L(X_k)$, $\mu_D^S(X_k)$ e $\mu_D^H(X_k)$ aplicando a expressão (22).

Ressalta-se que a aplicação de (22) pode ser modificada para ajustar os níveis de otimismo e pessimismo no processo de decisão utilizando o operador OWA (12) ou sua modificação (13).

2.6 Análise de alternativas de solução em ambiente fuzzy

A análise realizada até o momento pode gerar diferentes alternativas que, do ponto de vista formal, não podem ser distinguidas. Além disso, existe a possibilidade de um determinado decisor desejar analisar as alternativas apontadas até então sob o ponto de vista de considerações adicionais. Assim, destaca-se aqui a possibilidade da aplicação de técnicas de tomada de decisão multiatributos para avaliação, comparação, escolha, priorização e/ou ordenação de alternativas de solução (no caso desta pesquisa, as alternativas de solução são as localidades adequadas à instalação de usinas de energia renovável(X_k)).

As técnicas para a análise alternativas em ambiente *fuzzy* proporcionam uma forma adequada de considerar critérios adicionais espaciais ou não espaciais, quantitativos e/ou qualitativos. Tais critérios adicionais podem ser estimados com base na experiência, conhecimento e intuição dos especialistas envolvidos.

O modelo empregado considera o processamento das preferências, representadas por um par $\langle X, R \rangle$, onde X é um conjunto de alternativas $\{X_1, \dots, X_k\}$ e $R = \{R_1, \dots, R_B\}$ é um conjunto de Relações de Preferência *Fuzzy* Não Estritas (RPFNE) que podem ser apresentadas como

$$R = [X \times X, \mu_{R_b}(X_k, X_l), X_k, X_l \in X], \quad b = 1, \dots, B \quad (25)$$

onde $\mu_{R_b}(X_k, X_l)$ é a FP do b -ésimo RPFNE (Orlovski 1978) para o b -ésimo critério adicional.

Utilizando uma matriz quadrada com MF $\mu_{R_b} X \times X \rightarrow [0,1]$, uma RPFNE pode ser modelada associando um número dentro de um intervalo unitário $R_b(X_k, X_l)$ para cada par de alternativas $X_k, X_l \in X$. Assim, $R_b(X_k, X_l)$ indica o grau em que a alternativa X_k é pelo menos tão boa quanto X_l quando o critério C_b é considerado (Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011; Ekel; Pedrycz; Pereira Jr., 2020).

Ao lidar com modelos $\langle X, R \rangle$, é importante responder como é possível construir relações de preferência *fuzzy* para refletir as preferências de decisores. Normalmente, a maioria das situações reais de decisão pode ser abrangida por cinco formatos de preferência: Valores de utilidade; Relações de preferência multiplicativas; Ordenação das alternativas; Estimativas *fuzzy*; Relações de preferência *fuzzy* (FPRs) (Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011). De acordo com essa classificação, vale ressaltar que as estimativas *fuzzy* e as RPF, em particular, os RPFNE, são equivalentes.

Na verdade, se duas alternativas $X_k, X_l \in X$ possuem estimativa *fuzzy* $\mu[F_b(X_k)]$ e $\mu[F_b(X_l)]$ em relação ao critério C_b , então a quantidade $\mu_{R_b}(X_k, X_l)$ é o grau de preferência $\mu[F_b(X_k)] \geq \mu[F_b(X_l)]$, enquanto a quantidade $\mu_{R_b}(X_l, X_k)$ é o grau de preferência $\mu[F_b(X_l)] \geq \mu[F_b(X_k)]$.

Com base na concepção de uma FP de uma relação de preferência generalizada (Ekel, Pedrycz e Schinzinger, 1998), as quantidades $\mu_{R_b}(X_k, X_l)$ e $\mu_{R_b}(X_l, X_k)$ podem ser escritas como (Ekel; Pedrycz; Schinzinger, 1998; Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011):

$$\mu_{R_b}(X_k, X_l) = \sup_{\substack{X_k, X_l \in X \\ F_b(X_k) \leq F_b(X_l)}} \min\{\mu[F_b(X_k)], \mu[F_b(X_l)]\} \quad (26)$$

e

$$\mu_{R_b}(X_l, X_k) = \sup_{\substack{X_k, X_l \in X \\ F_b(X_l) \leq F_b(X_k)}} \min\{\mu[F_b(X_k)], \mu[F_b(X_l)]\} \quad (27)$$

respectivamente, considerando a minimização de C_b . Para a maximização C_b , (26) e (27) devem ser escritas, respectivamente, como $F_b(X_k) \geq F_b(X_l)$ e $F_b(X_l) \geq F_b(X_k)$.

Além disso, como mencionado antes, as funções de transformação podem ser aplicadas para reduzir todos os formatos utilizados em um único (Delgado, 1998; Herrera; Martinez; Sanchez, 2005; Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011; Ramalho *et al.*, 2019; Ekel; Pedrycz; Parreiras, 2011; Ramalho *et al.*, 2019; Ekel; Pedrycz; Pereira Jr., 2020), assim as informações de preferência apresentadas em outros formatos podem ser utilizadas para construir RPFs, fornecendo informações de preferência homogêneas, que podem ser analisadas e processadas.

Além disso, a existência de critérios de caráter quantitativo no tratamento de $\langle X, R \rangle$ modelos requer a redução das estimativas quantitativas correspondentes aos RPFs.

Particularmente, uma vez que para Relações de Preferência *Fuzzy* Recíprocas Aditivas (RPFRAs), as condições $\bar{\mu}_{R_b}(X_k, X_k) = 0,5$ and $\bar{\mu}_{R_b}(X_k, X_l) + \bar{\mu}_{R_b}(X_l, X_k) = 1$

são atendidas, então, utilizando os resultados de (Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011; Ramalho *et al.*, 2019; Ekel; Pedrycz; Pereira Jr., 2020), pode-se afirmar o seguinte:

$$\bar{\mu}_{R_b}(X_k, X_l) = \frac{F_b(X_k) - F_b(X_l)}{2[\max F_b(X) - \min F_b(X)]} + 0,5 \quad (28)$$

para minimizar $F_b(X)$ e

$$\bar{\mu}_{R_b}(X_k, X_l) = \frac{F_b(X_l) - F_b(X_k)}{2[\max F_b(X) - \min F_b(X)]} + 0,5 \quad (29)$$

para maximizar $F_b(X)$.

A RPFRA pode ser convertido para RPFNR (Pedrycz *et al.*, 2011; Ekel *et al.*, 2020) da seguinte forma:

$$\mu_{R_b}(X_k, X_l) = \begin{cases} 1 + \bar{\mu}_{R_b}(X_k, X_l) - \bar{\mu}_{R_b}(X_l, X_k), & \text{if } \bar{\mu}_{R_b}(X_k, X_l) < 0,5 \\ 1, & \text{if } \bar{\mu}_{R_b}(X_k, X_l) \geq 0,5 \end{cases} \quad (30)$$

O processamento das informações fornecidas na forma $R = \{R_1, \dots, R_B\}$ pode ser aplicado para restringir o conjunto X deixando apenas as alternativas que não são dominadas por outras de X .

Seis técnicas de análise de modelos $\langle X, R \rangle$ são descritas em Pedrycz, Ekel e Parreiras (2011) com base na função de escolha de Orlovski (1981). Os resultados de Pedrycz, Ekel e Parreiras (2011) podem ser usados para transformar RPFNE em Relações de Preferência *Fuzzy* Estritas (RPFES) como

$$\mu_R^S(X_k, X_l) = \max(\mu_R(X_k, X_l) - \mu_R(X_l, X_k), 0) \quad (31)$$

Como $\mu_R^S(X_l, X_k), \forall X_k \in X$ é a FP do conjunto *fuzzy* de todas as alternativas X_k estritamente dominadas por X_l , seu complemento $1 - \mu_R^S(X_l, X_k), \forall X_k \in X$ fornece o conjunto *fuzzy* das alternativas que não são dominadas por X_l . A FP deste conjunto pode ser expressa como

$$\mu_R^{ND}(X_k) = \min_{X_l \in X} [1 - \mu_R^S(X_l, X_k)] = 1 - \max_{X_l \in X} \mu_R^S(X_l, X_k), \quad \forall X_l \in X \quad (32)$$

As alternativas que podem ser escolhidas como solução do problema, de acordo com o nível mais alto de não dominância, são as seguintes:

$$X^{ND} = \left\{ X_k^{ND} \mid X_k^{ND} \in X, \mu_R^{ND}(X_k^{ND}) = \max_{X_k \in X} \mu_R^{ND}(X_k) \right\} \quad (33)$$

As expressões (31)-(33) também são aplicáveis quando R é um vetor de FPRs. Por exemplo, servem para o primeiro método de Pedrycz, Ekel e Parreiras (2011), considerando $R = \bigcap_{b=1}^B R_b$ com o FP (Orlovski, 1981; Ekel *et al.*, 1998):

$$\mu_R(X_k, X_l) = \min_{1 \leq b \leq B} \mu_{R_b}(X_k, X_l), \quad X_k, X_l \in X \quad (34)$$

Ao aplicar (34), o conjunto X^{ND} desempenha (Orlovski, 1981) o papel de conjunto de Pareto (Pareto, 1886).

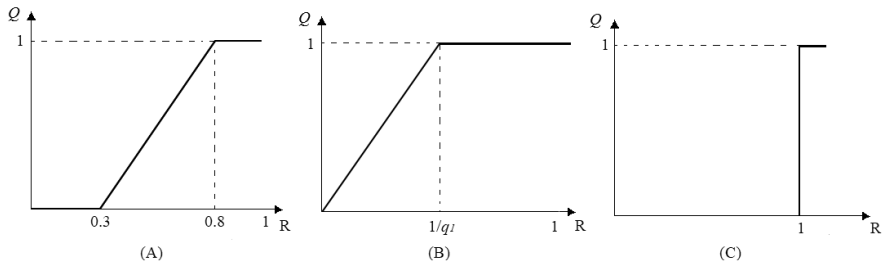
Uma abordagem flexível para ajustar o grau de otimismo usando o operador OWA (Yager, 1988; 1993; 1996; Xu, 2005) é apresentada em (Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011). De acordo com essa abordagem, (12) pode ser reescrito como:

$$\mu_R(X_k, X_l) = \text{OWA}(\mu_{R_1}(X_k, X_l), \mu_{R_2}(X_k, X_l), \dots, \mu_{R_B}(X_k, X_l)) = \sum_{b=1}^B \omega_b c_b \quad (35)$$

onde c_b é o i -ésimo maior valor entre $\mu_{R_1}(X_k, X_l), \dots, \mu_{R_B}(X_k, X_l)$. Novamente, o conjunto de pesos $\omega_i, i = 1, \dots, b$ em (35) deve satisfazer as condições $\omega_i \in [0, 1]$ e $\sum_{i=1}^B \omega_i = 1$.

Conforme mencionado anteriormente, diferentes ajustes do vetor de pesos ordenados refletem diferentes atitudes de decisão, caracterizadas por diferentes níveis de compensação entre critérios. Uma forma natural de determinação dos pesos é por meio da utilização de Quantificadores Linguísticos Fuzzy (QLF) (Yager, 1996). Esses quantificadores são conjuntos fuzzy $Q(x)$ que refletem o nível $x \in [0, 1]$ da porção do critério que satisfaz um conceito representado por Q . A Figura 2 mostra alguns exemplos de FLQs (Pedrycz *et al.*, 2011).

Figura 2. Quantificadores Fuzzy: (A) Maioria; (B) Pelo menos q_1 ; (C) Todos



Os pesos podem ser obtidos, após escolha do FLQ adequado, por

$$\omega_i = Q\left(\frac{i}{q}\right) - Q\left(\frac{i-1}{q}\right), \quad i = 1, \dots, q. \quad (36)$$

Com a matriz global de preferência não estrita, pode-se obter um *ranking* global das alternativas utilizando os resultados de Chiclana *et al.* (1997) e Pedrycz, Ekel e Parreiras (2011) relacionados ao *Quantifier Guided Dominance Degree* (QGDD), como segue:

$$QGDD(X_k) = OWA(\mu_R(X_k, X_l)), \quad l = 1, \dots, b, \quad l \neq k \quad (37)$$

$QGDD(X_k)$ reflete o nível de dominância X_k sobre outras alternativas, no sentido implementado pelo quantificador escolhido.

Além disso, é possível avaliar o *Quantifier Guided Nondominance Degree* (QGNDD) (Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011) da forma:

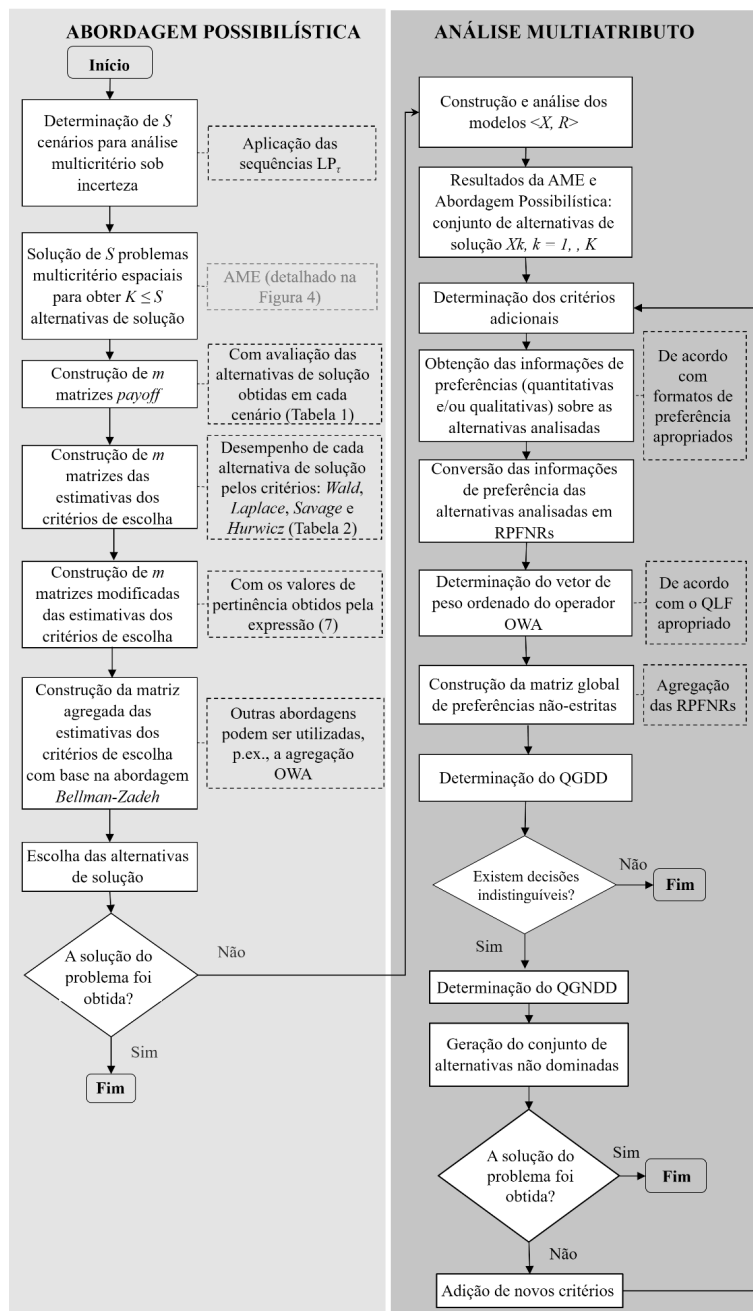
$$QGNDD(X_k) = OWA(1 - \mu_R^S(X_k, X_l)), \quad l = 1, \dots, b, \quad l \neq k \quad (38)$$

Para alcançar esse resultado, é necessário aplicar a matriz de preferência global não estrita para calcular a relação de preferência estrita global $\mu_R^S(X_k, X_l)$ (Chiclana *et al.*, 1997).

Considerando que é razoável escolher alternativas de acordo com o nível mais alto de não dominância, as alternativas X^{ND} podem ser encontradas de acordo com uma expressão semelhante a (33).

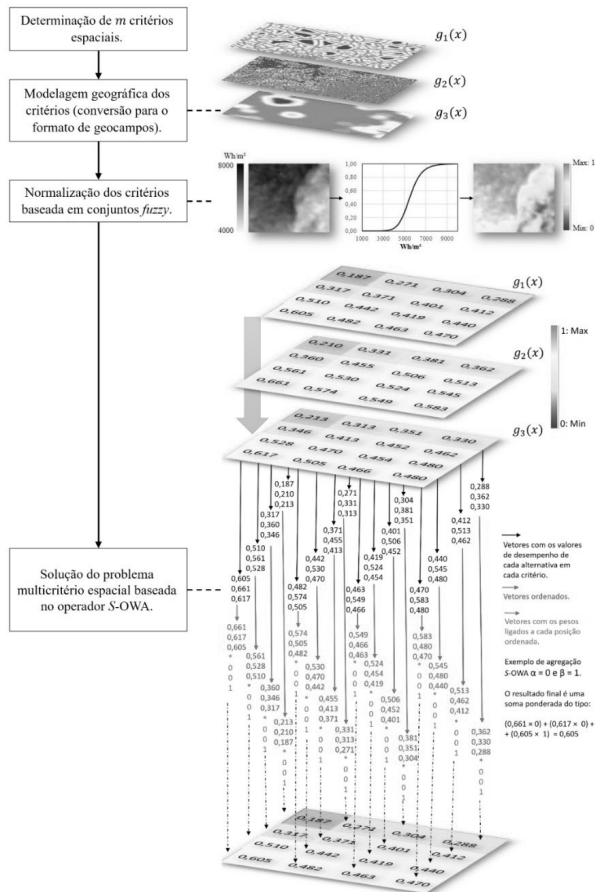
Por fim, cabe ressaltar que o QGNDD pode ser utilizado para a escolha da melhor alternativa e, no caso de indistinguibilidade das decisões entre duas ou mais alternativas, o QGDD pode ser utilizado para tentar distingui-las. As principais etapas da implementação dos modelos e métodos que compõem o processo de decisão descrito neste artigo estão resumidas no fluxograma da Figura 3.

Figura 3. Fluxograma dos modelos e métodos utilizados no processo de decisão proposto



Observe que o bloco destacado no fluxograma refere-se à realização da AME, que está detalhada na Figura 4.

Figura 4. Fluxograma do processo do AME



Estudo de Caso

A análise proposta foi aplicada à prospecção de fontes renováveis de energia no estado de Minas Gerais, Brasil, visando à determinação de alternativas locais adequadas à recepção de usinas híbridas, baseadas nas fontes solar fotovoltaica e eólica.

Os critérios espaciais de decisão, definidos na Seção 2.1, estão disponíveis em <https://drive.google.com/drive/folders/1rpX21e4i1ad8AZimatbwZC9Y57L1U880>.

Os dados georreferenciados utilizados para construção dos conjuntos *fuzzy* foram convertidos para a Projeção Cônica Conforme de Lambert (Harvey, 2008), específica para mapeamento da América do Sul. A resolução foi definida como 500×500, em metros, para todos os geocampos (de acordo com Tobler, 1987; 1988).

Definição dos cenários de análise

Entre os critérios espaciais descritos na seção anterior, dois deles têm profundas incertezas associadas: o potencial energético de um sistema de energia híbrido e o valor econômico das terras. Os demais critérios levantados não apresentam incertezas significativas, pois estão fundamentalmente relacionados com a existência ou ausência de entidades físicas bem definidas, como estradas, cidades etc.

Nesse sentido, o critério “potencial energético de um sistema de energia híbrido” foi determinado de acordo com o modelo descrito na Subseção 2.1, utilizando valores médios mensais de velocidade do vento e radiação solar (NASA, 2005; 2008). Os dados utilizados foram coletados em dez anos de medições para células de um grau de resolução, ou seja, possuem baixa precisão. Assim, para considerar as incertezas associadas, foram utilizadas as sequências LP_{τ} para geração de cenários de análise, de acordo com a Subseção 2.4. Os valores mensais mínimos e máximos da velocidade do vento e da radiação solar registrados em 10 anos de medições foram utilizados para construir os intervalos de incerteza utilizados em (14). Foram construídos cinco cenários e a energia potencial do sistema híbrido foi determinada para cada um deles.

Outro critério que possui incertezas associadas é o “valor econômico das terras”. Para considerar esse critério, foram utilizados os dados disponíveis em IBGE (2017) e EMATER (2019), que fornecem os custos da terra nua (R\$/hectare) para cada município mineiro de acordo com quatro classes principais de cobertura: terras com aptidão para a agricultura, pastagens plantadas, silvicultura ou pastagens naturais e áreas de preservação de fauna e flora. Cada uma dessas classes possui valores de custo mínimo e máximo, que foram utilizados em (14) para construção dos cenários.

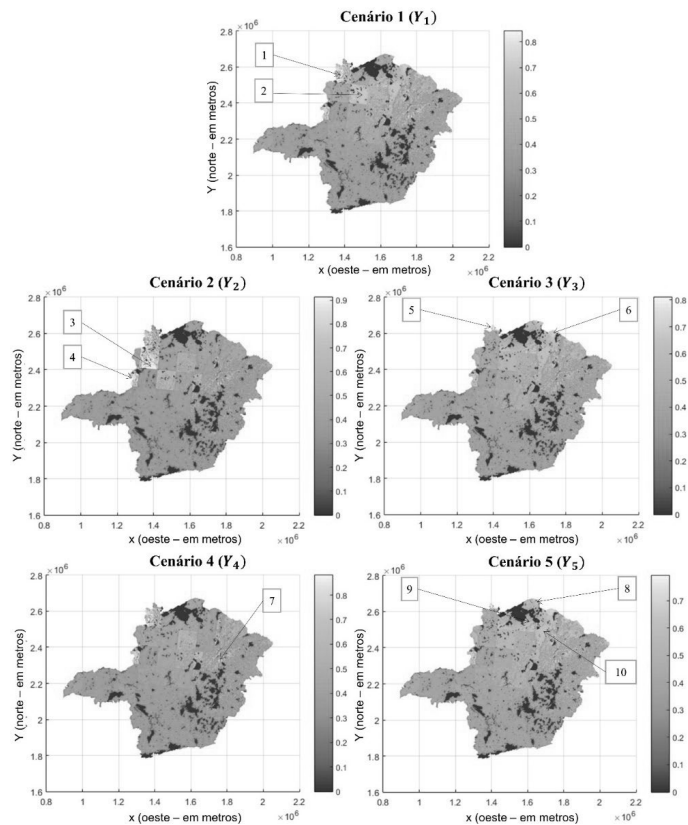
Resultados

Análise Multicritério Espacial sob condições de incerteza

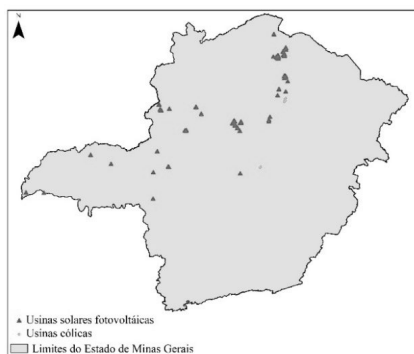
O problema de decisão para cada cenário foi resolvido por meio da aplicação do operador S -OWA (12), aplicando os parâmetros de otimismo e pessimismo $\alpha = 0.4$ e $\beta = 0.6$, respectivamente, em (13). A utilização desses parâmetros caracteriza uma atitude conservadora face ao risco da tomada de decisão. Nessa análise, os seis critérios do tipo fator apresentados pela Tabela 3 foram agregados para gerar um mapa global (mapa de decisão) onde as cinco restrições (Tabela 3) foram aplicadas com o objetivo de excluir soluções inviáveis.

A Figura 5 ilustra os resultados, ou seja, os mapas de decisão, obtidos para cada cenário. A cartela de cores expressa os valores dentro do intervalo unitário, refletindo a aptidão para instalação das usinas híbridas em cada região do mapa. As regiões em tons laranja/amarelas têm maior atratividade do que as regiões em tons azuis.

Figura 5. Resultados do SMA em cada cenário e soluções alternativas

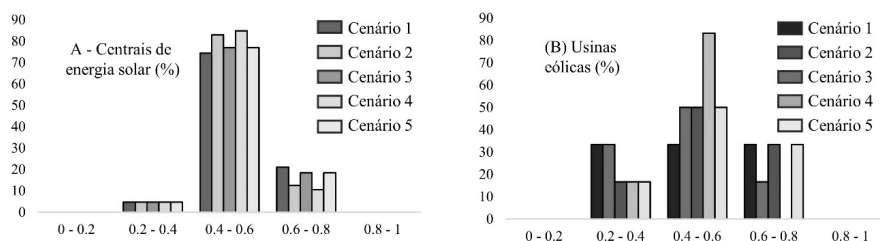


Atualmente, Minas Gerais não possui plantas híbridas (solares/eólicas) em operação ou em construção, o que dificulta a utilização de modelos para validar os resultados obtidos pela AME. Apesar disso, optou-se por utilizar as usinas solares fotovoltaicas e eólicas em operação no estado (Figura 6) para a análise da qualidade dos resultados obtidos (Figura 5).

Figura 6: Usinas existentes em Minas Gerais com capacidade instalada superior a 5 MW

(IDE-Sisema 2019)

Para tanto, utilizou-se um dos procedimentos apresentados em (Firozjaei *et al.*, 2019), que analisa o percentual de plantas existentes em áreas identificadas como adequadas pelos mapas de decisão gerados. A Figura 7 mostra os percentuais de usinas solares fotovoltaicas e eólicas existentes nas diferentes faixas de aptidão dos mapas de decisão (0 - 0,2; 0,2 - 0,4; 0,4 - 0,6; 0,6 - 0,8; 0,8 - 1) em cada uma dos cinco cenários criados. Os autores de (Firozjaei *et al.*, 2019) consideram como “áreas ótimas” para possível instalação de usinas cujos valores de aptidão estejam entre 0,6 - 0,8 e 0,8 - 1. Considerando que nesta pesquisa foram utilizadas plantas comuns para avaliar os resultados obtidos, presume-se que o intervalo de 0,4 a 0,6 também pode ser classificado como uma “área ideal”. Assim, tendo em consideração os resultados do AME (Figura 5), é possível observar que a maioria das centrais existentes estão em regiões com valores de aptidão na faixa de 0,4 - 0,6 para todos os cenários analisados (Figura 7).

Figura 7. Porcentagem de usinas existentes por faixa de aptidão dos mapas de decisão obtidos

Os mapas de decisão obtidos servem de base para a indicação de 10 alternativas de solução, ou seja, 10 localidades possíveis para instalação de plantas híbridas (X_k).

Todas essas alternativas estão localizadas em regiões com valores de pertinência $\geq 0,4$ e estão destacadas na Figura 5.

A matriz *payoff* agregada das estimativas dos critérios de escolha (obtida por meio da aplicação dos procedimentos descritos na seção 2.5) indica que as alternativas de solução X_1, X_5 , and X_6 são indistinguíveis. Dessa forma, é necessária a aplicação dos modelos $\langle X, R \rangle$ para o posterior ordenamento dessas alternativas de solução $X = \{X_1, X_5, X_6\}$, que são as seguintes: X_1 - Região central do município de Buritis (solução X_1 até o momento), X_2 - Norte do município de Formoso (solução X_5 até o momento) e X_3 - Noroeste do município de Espinosa (solução X_6 até o momento).

Esse conjunto de alternativas foi analisado com a aplicação dos seguintes critérios adicionais: 1) Distância das LTs planejadas, 2) Potencial social e 3) Vulnerabilidade natural. A avaliação das alternativas de solução, considerando o critério “Distância das LTs planejadas”, é baseada em informações quantitativas. Ao mesmo tempo, as estimativas de alternativas do ponto de vista dos critérios “Potencial social” e “Vulnerabilidade natural” foram obtidas na forma qualitativa. A Tabela 4 reflete as avaliações de cada alternativa de acordo com os critérios considerados.

Tabela 4. Avaliações de alternativas de solução

	$F_1(X_k): C_1$ [meters]	$F_2(X_k): C_2$	$F_3(X_k): C_3$
X_1	500.00	Moderate	Very Large
X_2	30,000.00	Very small	Large
X_3	25,800.00	Very small	Moderate

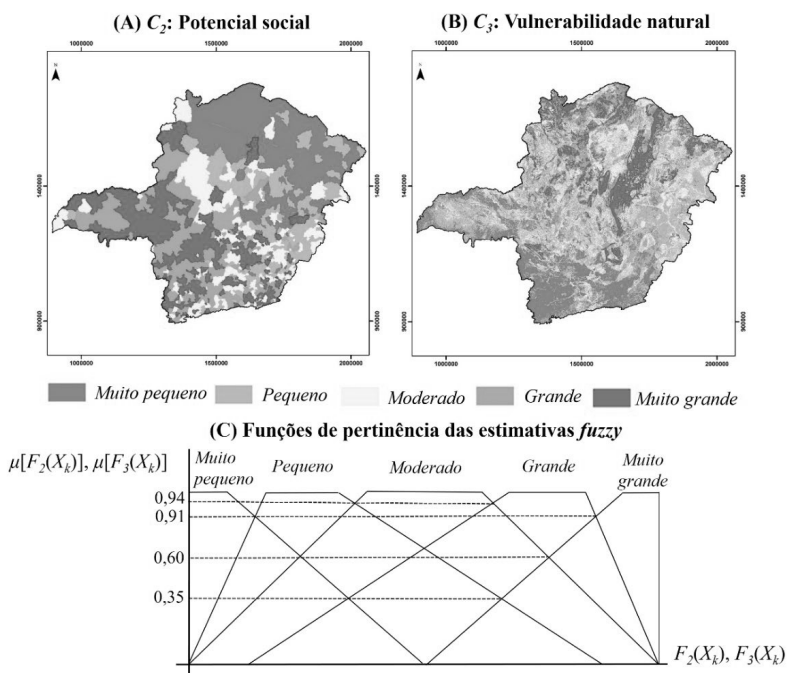
Para o primeiro critério, é possível aplicar (29) para construir o RPFRA correspondente. A aplicação da função de transformação (30) permite-nos converter a RPFRA obtida na seguinte RPFNR:

$\mu_{R_1}(X_k, X_l) =$	X_1	X_2	X_3
X_1	1	1	1
X_2	0	1	0.86
X_3	0.14	1	1

O critério “Potencial social” possui caráter qualitativo. Um potencial social pode ser definido como o conjunto de condições atuais, medidas pelas dimensões produtivas, naturais e humanas, que determinam o ponto de partida de um município ou região para

alcançar o desenvolvimento sustentável. Nesse sentido, regiões com elevado potencial social possuem uma infraestrutura de transportes bem desenvolvida, bem como atividades econômicas, condições sociais etc., entre outros (mais discussões podem ser encontradas em IDE-Sisema, 2019). Assim, a racionalidade da instalação de uma central de geração pode estar associada à priorização de áreas com elevado potencial social. Porém, a instalação de uma usina de geração de energia pode ser um passo capaz de estimular o desenvolvimento social de uma região, devido, por exemplo, à geração de empregos. Assim, essa etapa tem caráter estratégico, em termos de políticas públicas, para regiões carentes. Portanto, este estudo considera que o critério discutido deve ser minimizado. A Figura 8(A) apresenta as avaliações (níveis das FPs) desse critério e sua distribuição espacial para o estado de Minas Gerais. A Figura 8(B) também mostra as avaliações (níveis de FPs) para o critério “Vulnerabilidade natural”, que também deve ser minimizado e cujo caráter espacial pode ser observado no mapa. A Figura 8(C) mostra as FPs (ou valores *fuzzy*) das estimativas utilizadas para esses critérios.

Figura 8. Distribuição espacial e FpD das estimativas para os critérios “Potencial social” e “Vulnerabilidade natural”



Aplicando (26) e (27) para as estimativas apresentadas na Figura 8(C), definidas para $F_p(X_k) \leq F_p(X_l)$ e $F_p(X_l) \leq F_p(X_k)$, respectivamente, pode-se construir as seguintes RPFNRs:

$$\mu_{R_2}(X_k, X_l) =$$

	X_1	X_2	X_3
X_1	1	0.60	0.60
X_2	1	1	1
X_3	1	1	1

$$\mu_{R_3}(X_k, X_l) =$$

	X_1	X_2	X_3
X_1	1	0.91	0.60
X_2	1	1	0.94
X_3	1	1	1

Conforme mencionado acima, a escolha das técnicas de análise de modelos $< X, R >$ é uma prerrogativa dos decisores. Em particular, usando (34), podemos construir

$$\mu_R(X_k, X_l) =$$

	X_1	X_2	X_3
X_1	1	0.60	0.60
X_2	0	1	0.86
X_3	0.14	1	1

Aplicando (31), é possível obter o seguinte RPFE:

$$\mu_R^S(X_k, X_l) =$$

	X_1	X_2	X_3
X_1	0	0.60	0.46
X_2	0	0	0
X_3	0	0.14	0

Por fim, a aplicação de (32) gera o conjunto de alternativas não dominadas com a seguinte FP: $\mu_R^{ND}(X_k) = [1 \ 0.40 \ 0.54]$. Assim, a análise baseada na aplicação dos três critérios adicionais e da primeira técnica discutida gera o seguinte *ranking* das alternativas $X_1 > X_3 > X_2$.

Considerando agora a solução baseada na utilização do operador OWA em conjunto com QLF como regra de agregação para consideração dos três critérios adicionais. A utilização do quantificador *fuzzy* “Maioria” fornece o vetor dos pesos ordenados $\omega_1 = 0.0667$; $\omega_2 = 0.6667$, e $\omega_3 = 0.2667$, obtido por meio de (36). A sua utilização gera a seguinte matriz de preferência global não estrita obtida com base em (35):

$\mu_R(X_k, X_l) =$	X_1	X_2	X_3
X_1	1	0.83	0.63
X_2	0.73	1	0.92
X_3	0.77	1	1

Para obter o *ranking* global das alternativas, utiliza-se novamente o conceito de maioria *fuzzy* para agregar os elementos da matriz global de preferências não estritas obtida acima. Excluindo os elementos da diagonal principal, podem-se obter os pesos ordenados, com base na aplicação (36). Assim, é possível obter o seguinte *ranking* global das alternativas com a utilização do QGDD expresso por (37): $QGDD(X_k) = [0.71 \ 0.81 \ 0.86]$. Logo, de acordo com a aplicação dessa abordagem, as alternativas são ordenadas da seguinte forma: $X_3 > X_2 > X_1$.

Discussões

Neste trabalho, foram adaptados, aprimorados e aplicados modelos e métodos de tomada de decisão para o processo relacionado à determinação de alternativas locais para plantas de geração híbridas renováveis. A análise inicia-se com o AMC em condições de incerteza utilizada em conjunto com a abordagem possibilística e o operador *S*-OWA. Nesse sentido, em primeiro lugar, os critérios espaciais relevantes são modelados geograficamente (no formato geocampos) e normalizados por meio de conjuntos *fuzzy* (geocampos). O processo de normalização permite expressar todos os valores dos critérios em uma mesma escala (o intervalo unitário) e, ao mesmo tempo, expressar as preferências dos decisores quanto ao desempenho de cada alternativa em relação a cada critério. No processo de análise, o decisor deve definir a FP que melhor reflete as suas preferências para cada critério. No Estudo de Caso deste trabalho foram utilizadas as correlações (7)-(10). A agregação dos critérios para geração de um mapa de decisão final foi realizada utilizando o operador *S*-OWA, com os níveis de otimismo $\alpha = 0.4$ e pessimismo $\beta = 0.6$ para cinco cenários analisados. Esses procedimentos são executados

para tratar as incertezas internas. A Figura 5 apresenta os resultados do AME em cada cenário. É possível observar que, embora os mapas de decisão obtidos em cada cenário sejam bastante diferentes, há predomínio de áreas mais atrativas para instalação das usinas nas regiões Noroeste, Norte e Nordeste do estado de Minas Gerais.

Conforme mencionado anteriormente, é bastante difícil realizar a análise ou validação dos resultados obtidos pela AME, uma vez que o estado de Minas Gerais não possui plantas híbridas em operação. Dessa forma, foram utilizadas usinas eólicas e solares fotovoltaicas existentes para avaliar os resultados obtidos. Nesse sentido, a Figura 7 mostra os percentuais de usinas solares fotovoltaicas existentes (Figura 7(A)) e de usinas eólicas existentes (Figura 7(B)) em diferentes faixas de valores de aptidão (0 - 0,2; 0,2 - 0,4; 0,4) - 0,6; 0,6 - 0,8; 0,8 - 1) dos mapas de decisão gerados (Figura 5), em cada um dos cinco cenários analisados.

Primeiramente, é possível observar que, nas áreas classificadas com os maiores valores de aptidão (faixa de 0,8 - 1) não existem plantas, em nenhum cenário analisado. Contudo, isto pode ser considerado aceitável, uma vez que as centrais existentes não são plantas híbridas. Por outro lado, nenhuma das plantas existentes está localizada em regiões restritas (aquelas com valores de aptidão iguais a zero) ou em localidades com valores de aptidão mais baixos. Esse fato pode indicar que os modelos utilizados são capazes de identificar bem os piores locais para instalação de HREGs, além das áreas proibitivas.

A maioria das usinas solares fotovoltaicas existentes está localizada em regiões classificadas na faixa de aptidão de 0,4 - 0,6, em todos os cenários (Figura 7(A)). As centrais eólicas existentes estão distribuídas igualmente (33%) em regiões com valores de aptidão iguais a 0,2 - 0,4; 0,4 - 0,6; 0,6 - 0,8 no caso do Cenário 1. Em todos os outros cenários, a maioria das centrais eólicas existentes também estão localizadas em áreas com valores de aptidão na faixa de 0,4 - 0,6 (Figura 7(B)).

Conforme discutido acima, no trabalho correlacionado (Firozjaei 2019), os autores classificaram como “áreas ótimas” para possível instalação de usinas aquelas cujos valores de aptidão estão entre 0,6 - 0,8 e 0,8 - 1. Levando em consideração que utilizamos usinas comuns para avaliar os resultados obtidos para HREGs, o intervalo de 0,4 - 0,6 também pode ser classificado como uma “área ótima”. Assim, embora os dados utilizados sejam limitados, podemos assumir que existem evidências que indicam a qualidade dos mapas de decisão obtidos.

Vale ressaltar que os parâmetros utilizados na agregação implementam uma atitude de decisão pessimista, o que reflete, para cada alternativa de solução, o menor desempenho em relação a todos os critérios analisados. Uma alteração nos valores dos níveis de otimismo/pessimismo leva à geração de diferentes mapas de decisão, o que pode refletir, por exemplo, uma atitude mais compensatória face às decisões.

Para o tratamento das incertezas externas, aplica-se a abordagem possibilística. Para tanto, foram construídas matrizes *payoff* para cada critério do tipo de fator. Nesse Estudo de Caso, apenas dois critérios (“Potencial de energia de um sistema de energia híbrido” e “Valor econômico da terra nua”) estão associados a incertezas. Contudo, uma vez que todos os critérios devem ser levados em conta, as matrizes *payoff* devem ser construídas para todos os critérios.

O resultado final indica que, segundo os critérios de Wald e Hurwicz, a melhor alternativa de solução é X_5 . Ao mesmo tempo, do ponto de vista dos critérios de Laplace e Savage, as melhores soluções são X_6 e X_1 , respectivamente. Portanto, formalmente, essas soluções não podem ser distinguidas. É necessário então aplicar os procedimentos análise adicional destas alternativas.

Em particular, os procedimentos adotados permitem utilizar critérios de caráter quantitativo e/ou qualitativo (espaciais ou não espaciais). A informação qualitativa correspondente pode ser modelada por meio de distintos formatos de preferência e o decisor pode escolher o formato que julga mais adequado, com base no seu conhecimento, experiência e intuição.

Para o processamento das preferências foram utilizadas duas técnicas de análise de modelos $\langle X, R \rangle$. A aplicação da primeira técnica na presença dos três critérios adicionais proporciona a seguinte ordenação das alternativas: $X_1 > X_3 > X_2$.

A aplicação da segunda técnica permite refletir diferentes atitudes de decisão, que são orientadas por diferentes QLFs. A utilização do quantificador “Maioria” leva à seguinte ordenação das alternativas: $X_3 > X_2 > X_1$. Outros quantificadores também podem ser utilizados; por exemplo, “Pelo menos um”, “Tantos quanto possível” etc. Nesse sentido, o uso do quantificador “Todos” reduz o operador OWA ao operador MIN, fornecendo a mesma solução que foi obtida com base na primeira técnica. Os quantificadores implementam diferentes atitudes de decisão, principalmente relacionadas ao grau de tolerância ao risco dos DMs. A aplicação de diferentes técnicas, bem como de diferentes QLFs, pode levar a diferentes soluções. Isto deve ser considerado natural e a escolha da técnica e também do quantificador mais adequado é uma prerrogativa do decisor.

Conclusão

A escolha das metodologias (bem como das suas combinações) que compõem esta análise foi feita de forma a levar em conta as incertezas internas e externas inerentes aos processos de tomada de decisão. Nesse sentido, o tratamento das incertezas externas foi realizado, primeiramente, pela aplicação da abordagem possibilística, que permite considerar as estimativas características, que são utilizadas na construção dos critérios de escolha da abordagem clássica e também na construção de funções objetivo. Nesse ponto, as incertezas internas são consideradas através da aplicação de conjuntos *fuzzy* para normalizar os critérios espaciais. O processo de agregação para geração de mapas de decisão é realizado com base no ajuste dos parâmetros de otimismo e pessimismo do operador S-OWA. Isso permite gerar mapas (geocampos) que refletem diferentes atitudes de decisão relacionadas ao grau de tolerância ao risco dos decisores. No segundo momento, a análise das incertezas internas e externas é realizada por meio da modelagem e processamento de RPFs, orientadas pelos princípios metodológicos dos modelos $\langle X, R \rangle$. Essa etapa permite incluir critérios adicionais de caráter quantitativo e/ou qualitativo.

Levando em consideração o exposto, a principal contribuição deste trabalho é o tratamento adequado das incertezas (internas e externas) relacionadas ao problema da determinação de alternativas locais para usinas de geração híbrida renovável por meio da abordagem possibilística e da consideração de uma ampla gama de critérios (espaciais e não espaciais, quantitativos e qualitativos), bem como o uso de estratégias que incorporem o conhecimento, a experiência e a intuição do decisor na geração das preferências para o processo de decisão. Esses aspectos não são abordados sistematicamente na bibliografia relacionada.

Os desenvolvimentos futuros dos resultados deste trabalho podem estar relacionados com a avaliação da complementaridade energética entre três ou mais fontes. Além disso, o modelo de complementaridade pode ser aprimorado para levar em conta a complementaridade entre fontes, não apenas na mesma localidade, mas em diferentes partes de um território, considerando o sistema de transmissão de energia elétrica existente.

Referências

ABDULLAHI, S. *et al.* GIS-based modeling for the spatial measurement and evaluation of mixed land use development for a compact city. **GIScience & Remote Sensing**, v. 52, n. 1, p. 18-39, Jan. 2015.

AGÊNCIA NACIONAL DE ENERGIA ELÉTRICA. **Sistema de informações georreferenciadas do setor elétrico**. Brasília: ANEEL, 2018. Disponível em: <https://sigel.aneel.gov.br/Down/>. Acesso em: 25 out. 2018.

AL GARNI, H. Z.; AWASTHI, A. Solar PV power plants site selection: A review. In: YAHYAUI, I. (ed.). **Advances in renewable energies and power technologies**: volume 1: solar and wind energies. New York: Elsevier; 2018. p. 57-75.

AMARANTE, O. A. C.; SILVA, F. J. L.; PIÁ, P. E. **Atlas eólico**: Minas Gerais: v. 1. Belo Horizonte: CEMIG, 2010. Disponível em: http://www.cemig.com.br/pt-br/A_Cemig_e_o_Futuro/Inovacao/Alternativas_Energeticas/Documents/atlas%20eolico%20MG.pdf. Acesso em: 25 jun. 2019.

AMIRINIA, G.; MAFI, S.; MAZAHARI, S. Offshore wind resource assessment of Persian Gulf using uncertainty analysis and GIS. **Renewable Energy**, v. 113, p. 915-929, Dec. 2017.

ASAKEREH, A. *et al.* Developing a GIS-based fuzzy AHP model for selecting solar energy sites in Shodirwan region in Iran. **International Journal of Advanced Science and Technology**, v. 68, p. 37-48, 2014.

AYDIN N. Y.; KENTEL, E.; DUZGUN, H. S. GIS-based site selection methodology for hybrid renewable energy systems: A case study from western Turkey. **Energy Conversion Management**, v. 70, p. 90-106, Jun. 2013.

- BAGATINI, M. *et al.* Complementarity in time between hydro, wind and solar energy resources in the State of Rio Grande do Sul, in Southern Brazil. **Energy and Power Engineering**, v. 9, n. 9, p. 515-526, Aug. 2017.
- BELLMAN, R. E.; ZADEH, L. A. Decision-making in a fuzzy environment. **Management Science**, v. 17, n. 4, p. 141-164, 1970.
- BELUCO, A., SOUZA, P. K.; KRENZINGER, A. A dimensionless index evaluating the time complementarity between solar and hydraulic energies. **Renewable Energy**, v. 33, n. 10, p. 2157-2165, Oct. 2008.
- BELYAEV, L. S. **A practical approach to choosing alternative solutions to complex optimization problems under uncertainty**. Laxenburg: International Institute for Applied Systems Analysis, 1977.
- BRASIL. Ministério de Minas e Energia; EMPRESA DE PESQUISA ENERGÉTICA. **Plano decenal de expansão de energia 2027**. Brasília: MME/EPE, 2018. Acesso em: 25 jun 2019. Disponível em: https://www.epe.gov.br/sites-pt/publicacoes-dados-abertos/publicacoes/Documents/PDE%202027_aprovado_OFICIAL.pdf.
- BRASIL. República Federativa. **Pretendida contribuição nacionalmente determinada para consecução do objetivo da convenção-quadro das Nações Unidas sobre mudança do clima**. Brasília: Ministério das Relações Exteriores, 2015. Acesso em: 25 jun 2019. <http://extwprlegs1.fao.org/docs/pdf/bra185490.pdf>
- CAMARGO, L. R.; ZINK, R.; DORNER, W. Spatiotemporal modeling for assessing complementarity of renewable energy sources in distributed energy systems. **ISPRS Annals of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences**, v. 2, p. 1-8, 2015.
- CHICLANA, F. *et al.* A classification method of alternatives for multiple preference ordering criteria based on fuzzy majority. **Journal of Fuzzy Mathematics**, v. 4, p. 801-813, Jun. 1997.
- CRADDEN, L. *et al.* Multi-criteria site selection for offshore renewable energy platforms. **Renewable Energy**, v. 87, pt 1, p. 791-806, Mar. 2016.
- DELGADO, M. *et al.* Combining numerical and linguistic information in group decision making. **Information Sciences**, v. 107, n. 1/4, p. 177-194, Jun. 1998.
- DURBACH, I. N.; STEWART, T. J. Modeling uncertainty in multi-criteria decision analysis. **European Journal of Operational Research**, v. 223, n. 1, p. 1-14, Nov. 2012.
- EKEL, P. Y. *et al.* Multiobjective and multiattribute decision making in a fuzzy environment and their power engineering applications. **Information Sciences**, v. 361/362, p. 100-119, Sep. 2016.
- EKEL, P. Y. Fuzzy sets and models of decision making. **Computers and Mathematics with Applications**, v. 44, n. 7, p. 863-875, Oct. 2002.

EKEL, P. Y. Methods of decision making in a fuzzy environment and their applications. **Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications**, v. 47, n. 2, p. 979-990, Aug. 2001.

EKEL, P. Y.; PEDRYCZ, W.; PEREIRA JR., J. G. **Multicriteria decision-making under conditions of uncertainty: a fuzzy set perspective**. Hoboken: John Wiley & Sons, 2020.

EKEL, P. Ya. *et al.* Two-stage multicriteria georeferenced express analysis of new electric transmission line projects. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, v. 108, p. 415-431, Jun. 2019.

EKEL, P. Ya.; MARTINI, J. S. C.; PALHARES, R. M. Multicriteria analysis in decision making under information uncertainty. **Applied Mathematics and Computation**, v. 200, n. 2, p. 501-516, Jul. 2008.

EKEL, P.; PEDRYCZ, W.; SCHINZINGER, R. A general approach to solving a wide class of fuzzy optimization problems. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 97, n. 1, p. 49-66, Jul. 1998

EMPRESA DE ASSISTÊNCIA TÉCNICA E EXTENSÃO RURAL DO ESTADO DE MINAS GERAIS. **Valor de terra nua (VTN) 2019**. Belo Horizonte: Emater, 2019.

Disponível em:

http://www.emater.mg.gov.br/porta1.do?flagweb=novosite_pagina_interna&id=19167.

Acesso em: 10 set. 2019.

ESRI. **ArcGis 10.2**. São Paulo: ESRI, 2018. [Software].

FIROZJAEI, M. K. *et al.* An integrated GIS-based Ordered Weighted Averaging analysis for solar energy evaluation in Iran: current conditions and future planning. **Renewable Energy**, v. 136, p. 1130-1146, Jun. 2019.

GHORBANI, N.; MAKIAN, H.; BREYER, C. 2019. A GIS-based method to identify potential sites for pumped hydro energy storage: case of Iran. **Energy**, v. 169, p. 854-867, Feb. 2019.

GOODBODY, C. *et al.* Regional integration of renewable energy systems in Ireland - The role of hybrid energy systems for small communities. **International Journal of Electrical Power and Energy Systems**, v. 44, n. 1, p. 713-720, 2013.

GOODCHILD, M. F. Geographical data modeling. **Computers and Geosciences**, v. 18, n. 4, p. 401-408, May 1992.

HARVEY, F. **A primer of GIS: fundamental geographic and cartographic concepts**. New York: The Guilford Press, 2008.

HERRERA, F.; MARTINEZ, L.; SANCHEZ, P. J. Managing non-homogeneous information in group decision making. **European Journal of Operational Research**, v. 166, n. 1, p. 115-132, Oct. 2005.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Monitoramento da cobertura e uso da terra: 2014-2016**. Rio de Janeiro: IBGE, 2014. Disponível em:

<https://www.ibge.gov.br/geociencias/informacoes-ambientais/cobertura-e-uso-da-terra/15831-cobertura-e-uso-da-terra-do-brasil.html?=&t=downloads>. Acesso em: 10 ago. 2019.

JURASZ, J., F. A. *et al.* A review on the complementarity of renewable energy sources: Concept, metrics, application and future research directions. **Solar Energy**, v. 195, p. 703-724, Jan. 2020.

LAMADRID, A. J. Optimal use of energy storage systems with renewable energy sources. **International Journal of Electrical Power and Energy Systems**, v. 71, p. 101-111, Oct. 2015.

LATINOPOULOS, D.; KECHAGIA, K. A GIS-based multi-criteria evaluation for wind farm site selection. A regional scale application in Greece. **Renewable Energy**, v. 78, p. 550-560, Jun. 2015.

LUCE, R. D.; RAIFFA, H. **Games and decisions**. New York: John Wiley & Sons, 1957.

LUNA-RUBIO, R. *et al.* Optimal sizing of renewable hybrids energy systems: a review of methodologies. **Solar Energy**, v. 86, n. 4, p. 1077-1088, Apr. 2012.

MALCKZEWSKI, J.; RINNER C. **Multicriteria decision analysis in geographic information systems**. New York: Springer, 2015.

NATIONAL AERONAUTICS AND SPACE ADMINISTRATION. **Solar GHI Polygon Global 1 Degree NASA 2008**. Paris: Webservice-Energ, 2014. Disponível em: <http://www.webservice-energy.org/record/d5c614c49bac10a42fe212baeab1bc64c319d776/>. Acesso em: 05 Dec. 2018.

NATIONAL AERONAUTICS AND SPACE ADMINISTRATION. **Wind polygon 1 degree global NASA 2005**. Paris: Webservice-Energ, 2014. Disponível em: <http://www.webservice-energy.org/record/3a35184ba9e4db24a93c1a04a9e087001d8dcb37/>. Acesso em: 05 nov 2018.

ORLOVSKI, S. A. **Problems of decision making with fuzzy information**. Nauka: Moscow, 1981. (In Russian).

ORLOVSKI, S. Decision making with a *fuzzy* preference relation. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 1, n.3, p. 155-167, Jul. 1978.

PARETO, V. **Cours d'économie politique**. Lousanne: Lousanne Rouge, 1886.

PEDRYCZ, W.; EKEL, P. Y.; PARREIRAS, R. O. **Fuzzy multicriteria decision-making: models, methods and applications**. Chichester: John Wiley & Sons, 2011.

PEREIRA JR., J. G. *et al.* On multicriteria decision making under conditions of uncertainty. **Information Sciences**, v. 324, p. 44-59, Dec. 2015.

- PIANEZZOLA, G.; KRENZINGER, A.; VEGA, F. A. C. Complementarity maps of wind and solar energy resources for Rio Grande do Sul, Brazil. **Energy Power Engineering**, v. 9, n. 9, 489-504, 2017.
- RAM, C.; MONTIBELLER, G. Exploring the impact of evaluating strategic options in a scenario-based multi-criteria framework. **Technological Forecasting and Social Change**, v. 80, n. 4, p. 657-672, May 2013.
- RAMACHANDRA, T. V.; SHURUTHI, B. V. Spatial mapping of renewable energy potential. **Renewable and Sustainable Energy Reviews**, v. 11, n. 7, p. 1460-1480, Dec. 2007.
- RAMALHO, F. *et al.* Multicriteria decision making under conditions of uncertainty in application to multiobjective allocation of resources. **Information Fusion**, v. 49, p. 249-261, Sep. 2019.
- REIS, R. J.; TIBA, C. **Atlas Solarimétrico de Minas Gerais**. Belo Horizonte: Companhia de Energia de Minas Gerais (CEMIG), 2016.
- SABER, H. *et al.* Ascenario-based planning framework for energy storage systems with the main goal of mitigating wind curtailment issue. **International Journal of Electric Power and Energy Systems**, v. 104, p. 414-422, Jan. 2019.
- SERVIÇO GEOLÓGICO DO BRASIL - COMPANHIA DE PESQUISA DE RECURSOS MINERAIS. **Mapa de declividade em percentual do relevo brasileiro**. Brasília: SGB-CPRM, 2010. Disponível em: <http://www.cprm.gov.br/publique/Gestao-Territorial/Gestao-Territorial/Mapa-de-Declividade-em-Percentual-do-Relevo-Brasileiro-3497.html>. Acesso em: 25 out. 2019.
- SILVA, L. M. L. D. **Modelos e métodos para análise multicritério e tomada de decisão espacial em ambiente de incertezas e suas aplicações**. 2020. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2020. Disponível em: <https://ppgee.ufmg.br/defesas/1699D.PDF>. Acesso em: 30 jan. 2020.
- SILVA, L. M. L. *et al.* Multiattribute spatial decision-making for qualitative information processing as applied to the renewable energy generating sites prospection. **IEEE Access**, v. 8, p. 137745-137757, 2020.
- SIMISTER, J. *et al.* Many hamsters: how the EU can enable private firms to provide renewable energy. **International Journal of Green Economics**, v. 8, n. 2, p. 158-176, 2014.
- SISTEMA ESTADUAL DE MEIO AMBIENTE E RECURSOS HÍDRICOS (Minas Gerais). **Infraestrutura de dados espaciais do sistema estadual de meio ambiente e recursos hídricos**. Belo Horizonte: IDE-Sisema, 2019. Disponível em: <http://idesisema.meioambiente.mg.gov.br>. Acesso em: 30 jan. 2020.
- SOBOL', I. M. On the systematic search in a hypercube. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 16, n. 1, p. 790-793, 1979.

TAHRIA, M.; HAKDAOUI, M.; MAANAN, M. The evaluation of solar farm locations applying Geographic Information System and Multi-Criteria Decision-Making methods: Case study in southern Morocco. **Renewable and Sustainable Energies Reviews**, v. 51, p. 1354-1362, Nov. 2015.

TOBLER, W. Measuring spatial resolution. *In*: LAND RESOURCES INFORMATION SYSTEMS CONFERENCE, 1987, Beijing, China. **Proceedings** [...]. Beijing, China: Chinese Academy of Sciences & State Planning Commission, 1987. v. 1, p. 12-16.

TOBLER, W. Resolution, resampling and all that. *In*: MOUNSEY, H.; TOMLINSON, R. **Building Data Bases for Global Science**. London: Taylor and Francis, 1988. p. 129-137.

VASILEIOU, M.; LOUKOGEORGAKI, E.; VAGIONA, D. G. GIS-based multi-criteria decision analysis for site selection of hybrid offshore wind and wave energy systems in Greece. **Renewable and Sustainable Energy Reviews**, v. 73, p. 745-757, Jan. 2017.

WANG, H. F.; SUNG, M. P.; HSU, H. W. Complementarity and substitution of renewable energy in target year energy supply-mix planning-in the case of Taiwan. **Energy Policy**, v. 90, p. 172-182, Mar. 2016.

XU, Z. An overview of methods for determining OWA weights. **International Journal of Intelligent Systems**, v. 20, n. 8, p. 843-865, Aug. 2005.

YAGER, R. R. Families of OWA operators. **Fuzzy Sets Systems**, v. 59, n. 2, p. 125-148, Oct. 1993.

YAGER, R. R. On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics**, v. 8, n. 1, p. 183-190, Jan./Feb. 1988.

YAGER, R. R. Quantifier guided aggregation using OWA operators. **International Journal of Intelligence Systems**, v. 11, p. 49-73, Jan. 1996.

YAGER, R. R.; FILEV, P. D. Parameterized AND-like and OR-like OWA operators. **International Journal of General Systems**, v. 22, n. 3, p. 297-316, 1994.

ZADEH, L. A. Fuzzy Sets. **Information and Control**, v. 8, n. 3, p. 338-353, Jun. 1965.

Avaliação do risco operacional em subestações de energia elétrica e sua redução racional com base na alocação multicritério de recursos⁸

Willian Maia, Petr Iakovlevitch Ekel, Douglas Alexandre Gomes Vieira, Eduardo Antônio de Castro, Mateus Alberto Dorna de Oliveira, Igor Marques Reis, Kenedy Marconi Geraldo dos Santos, Henrique Silva Schuffner

1. Introdução

A eletricidade é uma forma de energia indispensável para o funcionamento de diferentes segmentos da indústria e para a vida humana. No entanto, o uso inadequado da eletricidade pode resultar em ferimentos aos trabalhadores, incluindo fatalidades, e danos aos equipamentos elétricos, causando perdas na produção (Baka; Uzunoglu, 2014; Park, 2019). Além disso, despesas com processos judiciais e multas impostas por agências de inspeção podem ser geradas (Brenner, 2013). A diminuição na frequência de acidentes de origem elétrica, quando comparada a outros tipos de riscos, pode levar à concepção equivocada de que a gestão do perigo elétrico e dos riscos elétricos está sob controle (Park, 2019; Brenner, 2013; National Fire Protection Association, 2018). Embora esses acidentes sejam raros, quando ocorrem, geralmente são graves e podem resultar em fatalidades (Floyd, 2014). Considerando isso, a implementação de gestão qualificada para reduzir os riscos envolvidos no processo de operação de subestações de energia tornou-se necessária nas atividades das empresas que realizam essa gestão correspondente (Park, 2019; Brenner, 2013). A complexidade de realizar uma avaliação de risco é um grande desafio para essas empresas (Roberts, 2019). A determinação das subestações mais críticas em termos de segurança operacional é necessária para o uso racional de recursos financeiros limitados. No entanto, as decisões sobre a alocação de recursos disponíveis entre as subestações geralmente são tomadas empiricamente, sem o uso de métodos convincentes (Brenner, 2013).

Levando em consideração os resultados de (Ramalho *et al.*, 2019), é possível desenvolver métodos que permitam a alocação racional de recursos entre subestações de energia, analisando modelos de tomada de decisão multicritério integrados aos conceitos de risco. Geralmente, a tomada de decisão multiobjetivo é conhecida como o tipo contínuo de tomada de decisão multicritério e suas principais características são que o tomador de decisão (TD) precisa alcançar múltiplos objetivos, enquanto esses objetivos são não comensuráveis e entram em conflito entre si (Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011; Ekel; Pedrycz; Pereira Jr., 2020). Um modelo de tomada de decisão multiobjetivo inclui um vetor de variáveis de decisão, funções objetivas que refletem os objetivos e restrições (Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011; Ekel; Pedrycz; Pereira Jr., 2020). O TD tenta maximizar ou minimizar as funções objetivas (Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011; Ekel; Pedrycz; Pereira Jr., 2020).

⁸ **Reconhecimento:** A versão de registro deste artigo está publicada na *IEEE Access*, e está disponível em: <http://dx.doi.org/10.1109/ACCESS.2021.3124529>.

MAIA, W.; EKEL, P.; VIEIRA, D. A. G.; CASTRO, E. A. de; OLIVEIRA, M. A. D. de; REIS, I. M.; SANTOS, K. M. G. dos. Evaluation of operational risk in power substations and its rational reduction on the basis of multicriteria allocating resources. *IEEE Access*, 9, 2021, 149383-149397.

Os riscos são frequentemente avaliados por um grupo de especialistas, e essas avaliações se baseiam em seu conhecimento, experiência, intuição e em escolhas individuais (Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011; Ekel; Pedrycz; Pereira Jr., 2020).

Nesse contexto, a presente pesquisa tem como objetivo desenvolver uma metodologia baseada em técnicas de tomada de decisão para reduzir a subjetividade no processo de avaliação dos riscos operacionais de subestações de energia. Os resultados da avaliação servem como base para a alocação dos recursos financeiros disponíveis no processo de gerenciamento de manutenção. O Estudo de Caso também é um aspecto original deste trabalho e fornece resultados úteis para engenheiros, gestores e empresas de mineração e distribuição de energia elétrica.

A principal contribuição desta pesquisa é o desenvolvimento de um método que considera informações técnicas e de segurança para alocação de recursos na resolução de problemas de risco operacional.

O principal fator inovador é a melhoria e redução da subjetividade dos modelos tradicionais de matriz de risco (por exemplo, Cox, 2008; Li; Bao; Wu, 2018), que permite obter estimativas de risco para a preparação de informações para a alocação de recursos.

A aplicação de fundamentos metodológicos para a construção e análise dos modelos $\langle X, F \rangle$ como modelos multiobjetivos para a alocação racional de recursos disponíveis visando reduzir riscos operacionais é outro fator inovador deste trabalho. Essa abordagem já foi amplamente utilizada para resolver vários problemas de engenharia elétrica (Ramalho *et al.*, 2019; Ekel *et al.*, 2016) e é utilizada nesta pesquisa, pela primeira vez, para alocação de recursos na resolução de problemas de risco operacional.

- Um dos resultados mais importantes do artigo é o método proposto chamado ARS. Seu uso permite a adoção de uma abordagem de fácil aplicação no nível de engenharia, que inclui:
- Definição de critérios relacionados à avaliação de riscos em subestações de energia em operação;
- Padronização de critérios e modos de avaliação;
- Utilização do conhecimento de profissionais experientes na ponderação dos critérios.

As funções mais significativas do ARS são as seguintes:

- Geração de soluções com base na integração dos conceitos de riscos e técnicas existentes para tomada de decisão multicritério;
- Integração de critérios e subcritérios para a construção das chamadas matrizes de risco;
- Redução da subjetividade no processo de avaliação de riscos;
- Preparação de informações para alocação de recursos;
- Redução da inadequação ou falta de dados estatísticos.

2. Avaliação de risco

2.1. Definição de risco

O risco pode ser definido como uma medida da extensão do perigo, avaliada pela correlação da probabilidade ou frequência de eventos indesejáveis com suas consequências ou efeitos (Ekel *et al.*, 2016; Siqueira; Souza, 2010). Sua representação é definida pela seguinte expressão:

$$R_i = P_i C_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

onde R_i corresponde ao valor de risco do i -ésimo evento, P_i corresponde à probabilidade de ocorrência do i -ésimo evento, C_i é a consequência do i -ésimo evento (National Fire Protection Association, 2018; International Organization for Standardization, 2018b). A probabilidade pode ser descrita como um número entre 0 e 1 que representa o grau de crença de que o evento ocorrerá, e sua consequência é o valor estimado ou pontuação para um determinado resultado (Ekel *et al.*, 2016). A avaliação de risco é um processo analítico que consiste em muitas etapas projetadas para garantir que os riscos sejam corretamente identificados e analisados quanto às suas consequências e à probabilidade de sua ocorrência (Ekel *et al.*, 2016).

A literatura relacionada apresenta métodos tradicionalmente utilizados no processo de avaliação de riscos, tais como Controle Hierárquico de Riscos, HIRARC, Bowtie, JSA, FMEA, FTA, LOPA e HAZOP (National Fire Protection Association, 2018; Saedi; Thambirajah; Pariatamby; Hirar, 2014; Cialkowski, 2017). Esses métodos, apesar de sua relevância no contexto da avaliação de riscos, não permitem fornecer informações necessárias para construir as chamadas matrizes de risco e para alocar recursos de forma racional.

Vários trabalhos são dedicados à resolução de problemas de avaliação de riscos em subestações de energia. Tanaka *et al.* (2010) aplicaram uma ferramenta para avaliar as condições de risco dos transformadores de subestações de energia. No trabalho de Siqueira e Souza (2010), os autores utilizam uma metodologia probabilística para avaliar os riscos de acidentes graves em subestações de energia. Em Dimopoulos (2012), é proposta uma abordagem para avaliação probabilística de riscos dos sistemas de aterramento de subestações de energia. Guo *et al.* (2014) propõem uma metodologia para avaliação de riscos de cibersegurança do sistema de automação de subestações, aplicando o método do Processo Analítico Hierárquico (AHP). Em Omidvar, Azizi e Abdollahi (2017) e Liu *et al.* (2021), os autores propõem uma avaliação de riscos sísmicos para componentes de subestações de energia. No trabalho de Zhou *et al.* (2017) é proposta uma abordagem para a avaliação de riscos de subestações de energia para resolver a relação de dispositivos secundários e a análise de risco do impacto nos dispositivos primários. Em Zhang e Chen (2018), um método de avaliação de riscos é introduzido para resolver problemas de subestações de energia aplicando o método AHP e números triangulares *fuzzy*. Em Wei *et al.* (2011), um modelo é aplicado para avaliar o risco financeiro de um projeto de subestação de energia. Gao *et al.* (2014) apresentam um método introduzido para conduzir uma avaliação de risco de segurança da informação para um sistema de comunicação de subestação de energia usando o método AHP e o

método Delphi com uma combinação da teoria de Gray. Em Zou *et al.* (2019), os autores propõem uma ferramenta de avaliação de segurança da informação em subestações inteligentes para prevenir ataques cibernéticos.

Os trabalhos mais citados utilizam análise de dados para resolver problemas de avaliação de riscos. Em algumas circunstâncias, não há dados históricos disponíveis. Por esse motivo, as opiniões de especialistas são consideradas para obter as estimativas de risco operacional e reduzir a inadequação ou falta de dados estatísticos. Em todos os trabalhos citados, questões relacionadas à avaliação sistemática de riscos em subestações de energia não são consideradas. Esses trabalhos são dedicados a resolver problemas específicos, como avaliação de risco de transformadores de energia, riscos de sistemas de automação, ataques cibernéticos, decisões de investimento em projetos e danos causados por terremotos. Além disso, nenhum dos trabalhos considera aspectos relacionados à operação, manutenção e segurança simultaneamente para a preparação de informações para alocação de recursos. O objetivo deste estudo é desenvolver um método para estimar e reduzir o risco operacional por meio da alocação de recursos financeiros entre subestações de energia, aplicando técnicas de tomada de decisão multicritério. Para alcançar esse objetivo, o estudo propõe um método que reduz a subjetividade na avaliação de riscos e prepara as informações para a alocação de recursos.

2.1. Matriz de risco

O risco pode ser representado graficamente por meio de seus componentes (probabilidade e consequência), aplicando a matriz de risco (Duijm, 2015).

A matriz de risco geralmente é utilizada para priorizar e ordenar as medidas de controle de redução de risco nos processos de tomada de decisão (Bao *et al.*, 2017; Duijm, 2015; Li; Bao; Wu, 2018). É considerada fácil de aplicar e interpretar. É utilizada por pessoas sem experiência em gestão de riscos (Ruan; Yin; Frangopol, 2015; Sutton, 2015; International Organization for Standardization, 2018a; Li; Bao; Wu, 2018). O modelo tradicional de matriz de risco permite uma avaliação quantitativa, semiquantitativa ou qualitativa a ser realizada, geralmente resultando em resultados imprecisos devido ao alto grau de incerteza fornecido pelo processo de quantificação da probabilidade e consequência (Cox, 2008; 14, Ekel *et al.*, 2016, Li; Bao; Wu, 2018).

Uma matriz de risco é uma ferramenta utilizada para alocar recursos para reduzir os riscos (Duijm, 2015). Devido às suas limitações técnicas, a qualidade da alocação de recursos geralmente é comprometida. Destacamos o alto grau de incerteza fornecido pelos modelos tradicionais de matriz de risco, avaliação inadequada de riscos pelos participantes (viés cognitivo humano) e integração inadequada de opiniões coletivas durante o processo de avaliação de riscos (Cox, 2008; Markowskiand; Mannan, 2008; Bao *et al.*, 2017). O erro típico na gestão de riscos é gastar todos os recursos financeiros em eventos altamente improváveis, enquanto eventos menos graves podem se manifestar se forem mais prováveis (Duijm, 2015).

Poucos trabalhos são dedicados ao *design* de matrizes de risco, como por exemplo Cox (2008), Bao *et al.* (2017), Duijm (2015) e Li, Bao e Wu (2018). Seus resultados

fornece recomendações para o *design* e uso de matrizes de risco. Em Markowski e Mannan (2008), Can e Toktas (2018) e Hsu, Huang e Tseng, (2016), escalas linguísticas são utilizadas para reduzir incertezas no *design* da matriz de risco. Smith, Siefert e Drain (2009) constroem uma matriz de risco com base no método AHP. O trabalho de Ekel, Menezes e Schuffner Neto (2007) descreve como os vieses cognitivos afetam a colocação de pontos de risco dentro de uma matriz de risco quando os especialistas julgam subjetivamente a probabilidade do risco e, separadamente, a consequência de um risco. A literatura relacionada demonstra o uso do método de tomada de decisão (AHP) para resolver problemas de avaliação de riscos e minimizar as incertezas correspondentes. Além disso, os trabalhos não aplicam modelos multicritérios para alocar recursos disponíveis integrados com os conceitos de matriz de risco.

Portanto, não é possível definir um valor global de risco operacional aplicando os métodos discutidos e trabalhos correlatos para a construção de funções objetivas para a alocação de recursos em subestações de energia.

3. Modelos de tomada de decisão

Existem duas amplas classes de modelos aplicados na análise multicritério: modelos de tomada de decisão multiobjetivo em Pedrycz, Ekel e Parreiras (2011) e Ekel, Pedrycz e Pereira Jr. (2020), são chamados modelos $\langle X, F \rangle$ e métodos de decisão multiatributo (por exemplo, AHP, MAUT e modelos $\langle X, R \rangle$) (Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011; Ekel; Pedrycz; Pereira Jr., 2020).

Vários trabalhos são dedicados a resolver problemas de tomada de decisão em um ambiente *fuzzy*, por exemplo, Ekel *et al.* (2016), Ekel, Menezes e Schuffner Neto (2007) e Silva *et al.* (2020).

A tomada de decisão multiatributo é caracterizada por permitir identificar, avaliar, comparar, ordenar, priorizar e fazer a escolha mais racional entre alternativas em problemas de tomada de decisão (Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011; Ekel; Pedrycz; Pereira Jr., 2020).

O método AHP é utilizado nos processos de tomada de decisão considerados em Pedrycz; Ekel; Parreiras (2011), Saaty (1980; 2013). AHP é uma combinação de métodos de análise qualitativa e quantitativa, sistemática e hierárquica Saaty (1980).

A combinação desses métodos é usada em uma variedade de situações de decisão, abrangendo áreas governamentais, empresariais, industriais e educacionais (Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011). O método consiste em realizar modelagem estrutural que, além da estruturação qualitativa, incorpora uma estrutura na forma de pesos Saaty (1980; 2013). O AHP pode ser utilizado com vários tipos de dados, incluindo julgamentos baseados em experiências e valores (Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011). Além disso, o método AHP fornece uma avaliação de desempenho do resultado Saaty (1980; 2013). O método AHP permite avaliar a consistência dos julgamentos Saaty (1980; 2013). O método AHP permite representar as preferências dos tomadores de decisão, especialmente em situações em que o grupo de decisão é composto por indivíduos com interesses e pontos de vista divergentes (Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011).

Em Pedrycz; Ekel; Parreiras, (2011) e Ekel, Pedrycz e Pereira Jr. (2020), a tomada de decisão multiobjetivo é definida como o tipo contínuo de tomada de decisão multicritério. As principais características são que o tomador de decisão (TD) precisa alcançar múltiplos objetivos, enquanto esses objetivos entram em conflito uns com os outros e são não comensuráveis (Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011; Ekel *et al.*, 2016). O TD tenta maximizar ou minimizar as funções objetivas (Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011; Ekel; Pedrycz; Pereira Jr., 2020). Os resultados de Pedrycz, Ekel e Parreiras (2011), Barredo *et al.* (2011), Bellman e Zadeh (1970) e Ekel e martini (2008) mostram que a análise de modelos $\langle X, F \rangle$ pode ser baseada na abordagem de Bellman-Zadeh para tomada de decisão em um ambiente *fuzzy*. Sua adaptação e aplicação proporcionam uma maneira construtiva e computacionalmente eficaz de gerar soluções harmoniosas na análise de modelos $\langle X, F \rangle$.

A opinião de especialistas pode ser utilizada no processo de avaliação de riscos. Variáveis linguísticas são usadas para representar melhor o pensamento humano e, assim, reduzir a subjetividade das respostas (Ekel *et al.*, 2009).

Nesse contexto, o AHP foi selecionado como base para o método ARS. Da mesma forma, opiniões de especialistas são utilizadas para determinar os pesos dos critérios avaliados para aprimorar os resultados da avaliação de riscos. Por fim, a abordagem de Bellman-Zadeh é aplicada para gerar soluções na análise de modelos $\langle X, F \rangle$.

4. Alocação de recursos - modelo $\langle X, F \rangle$

Os métodos existentes de alocação de recursos, baseados em princípios fundamentais de alocação (alocação proporcional, alocação ótima e princípio de prioridade inversa (Burkov; Kondrat'ev, 1981), têm limitações significativas (Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011) que podem ser eliminadas aplicando uma abordagem multicritério, que permite considerar e maximizar as consequências positivas ou minimizar as consequências negativas da alocação de recursos ou de suas escassezes. Por exemplo, os primeiros resultados nessa área estão relacionados à resolução do conjunto de problemas de alocação de escassez de energia e energia em diferentes níveis de hierarquias territoriais, temporais e situacionais de gestão de carga, gerados pelos impactos do desastre de Chernobyl (Sklyarov; Prakhovnik; Ekel, 1987).

A satisfação dos objetivos relacionados à alocação multiobjetivo de recursos está associada à maximização ou minimização de funções objetivas lineares (Ramalho *et al.*, 2019):

$$F_p(X) = \sum_{i=1}^n c_{pi} x_i, \quad p = 1, 2, \dots, q, \quad (2)$$

onde $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ são as variáveis que correspondem ao volume de recursos procurados para o i -ésimo consumidor $c_{pi}, p = 1, 2, \dots, q, i = 1, 2, \dots, n$ são indicadores específicos, correspondentes ao objetivo específico p , para o i -ésimo consumidor. Ao mesmo tempo, a satisfação de objetivos no caso de alocação multiobjetivo de escassez de recursos está associada à maximização ou minimização de funções objetivas lineares (Ramalho *et al.*, 2019):

$$F_p(\Delta X) = \sum_{i=1}^n c_{pi} \Delta x_i, \quad p = 1, 2, \dots, q, \quad (3)$$

onde Δx_i , $i = 1, 2, \dots, n$ são as variáveis que correspondem ao volume de limitações de recursos buscados pelo i -ésimo consumidor. As funções objetivas da Equação (2) e Equação (3) não são os únicos tipos de funções objetivas que podem ser usadas na alocação multiobjetivo de recursos ou suas escassezes. Outros tipos de funções objetivas (lineares, fracionárias, quadráticas etc.) são considerados em Sklyarov, Prakhovnik e Ekel (1987); às vezes, podem melhor refletir a essência de objetivos específicos.

Três modelos de alocação de recursos ou suas escassezes são considerados em (Ramalho *et al.*, 2019):

Alocação de recursos disponíveis: demanda dos consumidores D_i , $i = 1, 2, \dots, n$ são fornecidos e um recurso total disponível é $R < \sum_{i=1}^n D_i$. Então, o problema apresenta a seguinte estrutura:

$$F_p(X) \Rightarrow \max_{X \in L} \text{ or } \min_{X \in L}, \quad p = 1, 2, \dots, q \quad (4)$$

sujeito às restrições

$$0 \leq x_i \leq D_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

e

$$\sum_{i=1}^n x_i = R. \quad (6)$$

Alocação de escassez de recursos com cortes ilimitados: as demandas do consumidor D_i , $i = 1, 2, \dots, n$ são fornecidas e um recurso total está disponível $R < \sum_{i=1}^n D_i$. Portanto, a escassez de recursos é $A = \sum_{i=1}^n D_i - R$, e o problema tem a seguinte estrutura:

$$F_p(\Delta X) \Rightarrow \max_{X \in L} \text{ or } \min_{X \in L}, \quad p = 1, 2, \dots, q \quad (7)$$

sujeito às restrições:

$$\Delta x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

e

$$\sum_{i=1}^n \Delta x_i = A \quad (9)$$

Alocação de escassez de recursos com cortes limitados: demandas D_i , $i = 1, 2, \dots, n$, bem como demandas mínimas aceitáveis dos consumidores D_m , $i = 1, 2, \dots, n$. O problema consiste em alcançar a Equação (7), levando em consideração as restrições:

$$0 \leq \Delta x_i \leq A_i = D_i - D_i^m, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

5. Análise de risco sistêmica

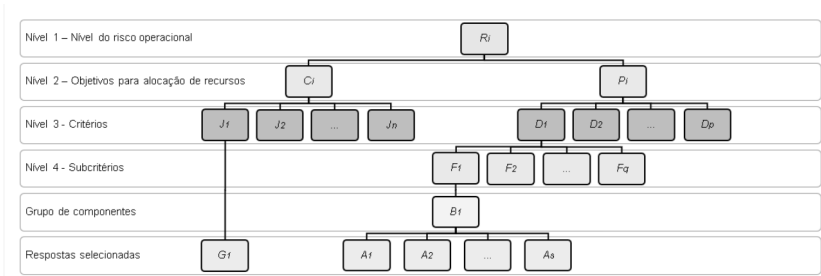
Esta seção apresenta a metodologia proposta baseada na aplicação de conceitos de risco e técnicas de tomada de decisão. Sua aplicação reduz a subjetividade da avaliação de riscos e aumenta a qualidade das decisões relacionadas à alocação de recursos entre as subestações de energia. A metodologia propõe a construção de uma matriz de risco integrando esse processo com a aplicação do método AHP para determinar os níveis de risco das subestações de energia em estudo, a fim de definir os montantes de recursos financeiros a serem alocados de acordo com objetivos vinculados à avaliação de riscos.

O método ARS possui os seguintes passos:

1. Seleção das n subestações de energia a serem avaliadas para alocação de recursos financeiros entre elas.
2. Definição do grupo de especialistas responsáveis pela estruturação do modelo de avaliação de riscos.
3. Definição dos critérios relevantes e subcritérios para compor a avaliação de riscos operacionais das subestações de energia.
4. Classificação dos critérios de acordo com os objetivos: consequência C_i ou probabilidade P_i . A partir dessa classificação, é possível construir a hierarquia para cada eixo da matriz de risco.
5. Integração dos critérios e subcritérios respeitando a hierarquia proposta pelos especialistas.

Esta pesquisa define um modelo de integração entre a matriz de risco, critérios, subcritérios e seus respectivos pesos. Um exemplo de um modelo mental dessa hierarquia é ilustrado na Figura 1. Para sua construção, é recomendado limitar a cinco subcritérios por critério, dada a complexidade envolvida em fazer as comparações e obter um julgamento coerente usando o método AHP (Saaty, 1980; 2013).

Figura 1. Modelo Mental da Hierarquia Matemática



6. Definição dos pesos de critérios e subcritérios. Nesta etapa, os especialistas comparam os grupos de critérios ou subcritérios no mesmo nível e definem uma opinião coletiva. Os estudos (por exemplo, Ramalho *et al.*, 2019; Bernardes; Ekel; Parreiras, 2009; Parreiras, 2010) utilizaram a opinião coletiva para resolver problemas de tomada de decisão. A determinação dos valores dos pesos de cada critério de consequência (ω_j) e probabilidade (ω_k) ou subcritério da probabilidade

(ω_f^k) são obtidos aplicando os conceitos recomendados pelo método AHP (Saaty, 1980; 2013). Trabalhos recentes demonstram que o método AHP é adequado para determinar os valores dos pesos (por exemplo, Ramalho *et al.*, 2019; Lyu *et al.*, 2019; Ilbahar; Cebi; Kahraman, 2019).

7. Preparação de um questionário que abrange as questões e uma escala linguística relacionada a cada critério ou subcritério. Esse questionário também considera a inserção dos grupos de componentes definidos pelos especialistas. De acordo com a resposta selecionada na escala linguística, um escore de A_h (nível da escala linguística) foi obtido para avaliações relacionadas à probabilidade P_i e G_j (nível da escala linguística) para avaliações relacionadas à consequência C_i . Para perguntas com três ou cinco opções de resposta, uma escala linguística é aplicada (0,1, 0,5 ou 1,0) ou (0,1, 0,2, 0,4, 0,6 ou 1,0), respectivamente.

Vários trabalhos utilizam escalas linguísticas em processos de tomada de decisão (por exemplo, (Ramalho *et al.*, 2019; Ekel *et al.*, 2016). Todas as opções de resposta são previamente conceituadas por especialistas para reduzir a subjetividade no processo de avaliação de risco operacional (Pedrycz; Ekel; Parreiras, 2011; Ekel; Pedrycz; Pereira Jr., 2020). As escalas linguísticas definidas no questionário representam o nível de probabilidade e impacto operacional por critério ou subcritério. Quanto maior o valor da escala, maior a contribuição para o risco operacional. Para cada grupo de critérios (ω_j e ω_k) ou subcritério (ω_f^k), a soma dos pesos é limitada de acordo com as seguintes expressões:

$$\sum_{j=1}^m \omega_j = 1, \quad (11)$$

$$\omega_j \geq 0, \quad (12)$$

onde ω_j correspondem ao valor do peso do j -ésimo critério,

$$\sum_{k=1}^p \omega_k = 1, \quad (13)$$

$$\omega_k \geq 0, \quad (14)$$

onde ω_k correspondem ao valor do peso do k -ésimo critério.

$$\sum_{f=1}^q \omega_f^k = 1, \quad \forall k = 1, 2, \dots, n, \quad (15)$$

$$\omega_f^k \geq 0, \quad (16)$$

onde ω_f^k correspondem ao valor do peso do ω_f^k -ésimo subcritério do k -ésimo critério.

8. Aplicação de um questionário por meio de entrevistas e avaliação de campo das n subestações de energia. A realização de entrevistas usando questionários é uma prática aplicada para obter as informações desejadas de maneira mais organizada e objetiva (Huang *et al.*, 2013; Sossa; Halal; Zarta, 2019).
9. Integração dos pesos de critérios e subcritérios com as avaliações A_h e G_j (respostas às perguntas relacionadas à probabilidade e consequência,

respectivamente) realizadas no passo anterior. Seu cálculo possibilita a obtenção do valor do risco operacional R_i . Neste passo, é calculado:

$$B_f = \sum_{h=1}^s A_h, \quad f = 1, 2, \dots, q, \quad (17)$$

que representa a soma dos valores obtidos ao responder cada pergunta A_h do grupo de componentes h -ésimo, do subcritério f -ésimo. Também é calculado

$$F_f = \frac{\omega_f^k B_f}{s}, \quad f = 1, 2, \dots, q, \quad k = 1, 2, \dots, p \quad (18)$$

representando o resultado da avaliação do f -ésimo subcritério multiplicado pelo peso ω_k do f -ésimo subcritério referente ao k -ésimo critério e dividido pela quantidade de s grupos de componentes.

É possível calcular a soma dos indicadores F_f do q -ésimo subcritério pertencente ao nível 3 da seguinte forma:

$$K_k = \sum_{f=1}^q F_f, \quad k = 1, 2, \dots, p. \quad (19)$$

Calculando

$$D_k = \omega_k K_k, \quad k = 1, 2, \dots, p, \quad (20)$$

para o k -ésimo critério pertencente ao nível 2, é possível obter

$$P_i = \sum_{k=1}^p D_k, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (21)$$

da Equação (1), que deve ser utilizada na alocação de recursos entre subestações.

O uso de J_j calculado como

$$J_j = \omega_j G_j, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (22)$$

permite obter C_i da seguinte forma:

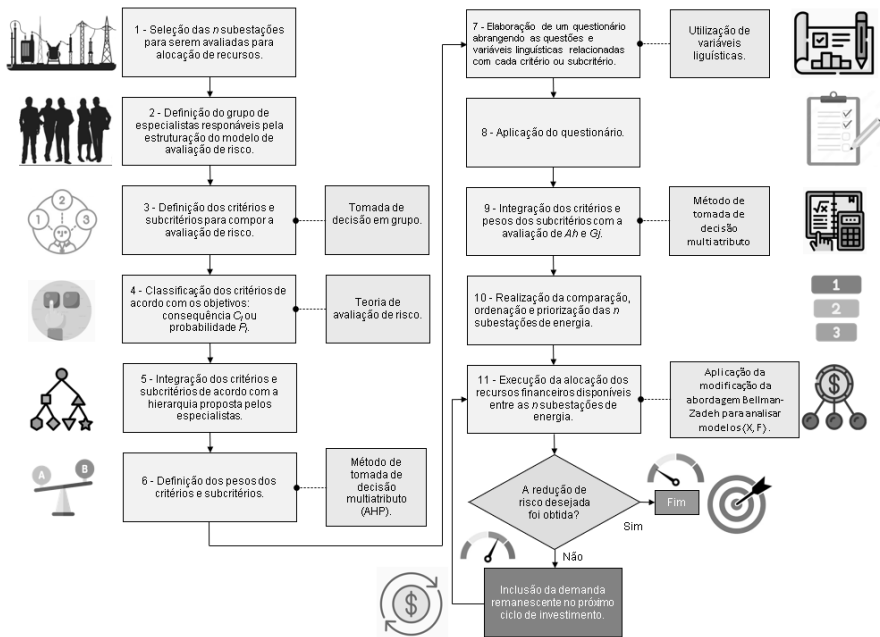
$$C_i = \sum_{j=1}^n J_j, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (23)$$

Realizar a comparação, ordenação e/ou priorização das n subestações de energia, analisando os valores de R_i . A matriz de risco é utilizada para representar o resultado.

10. Execução da alocação de recursos financeiros disponíveis entre as n subestações de energia, aplicando o modelo 1 de Ramalho *et al.* (2019).

Os procedimentos de alocação de recursos baseados na avaliação de riscos aplicando o método ARS estão apresentados na Figura 2.

Figura 2. Fluxograma do modelo ARS



6. Estudo de Caso

Esta seção apresenta um Estudo de Caso ilustrando a aplicação do método ARS para avaliar o risco operacional de três subestações de energia. As ferramentas metodológicas e suas combinações propostas no presente trabalho são aplicadas a um Estudo de Caso relacionado a uma empresa mineradora no estado de Minas Gerais, Brasil. Os resultados desta pesquisa podem fornecer indicadores importantes para gerenciar o risco operacional das subestações de energia.

No passo (1) do método, as subestações de energia foram selecionadas. Suas características são apresentadas na Tabela 1.

Tabela 1. Especificação técnica das subestações

ID	kV	MVA
PS1	34,5	15
PS2	138	43
PS3	69	43

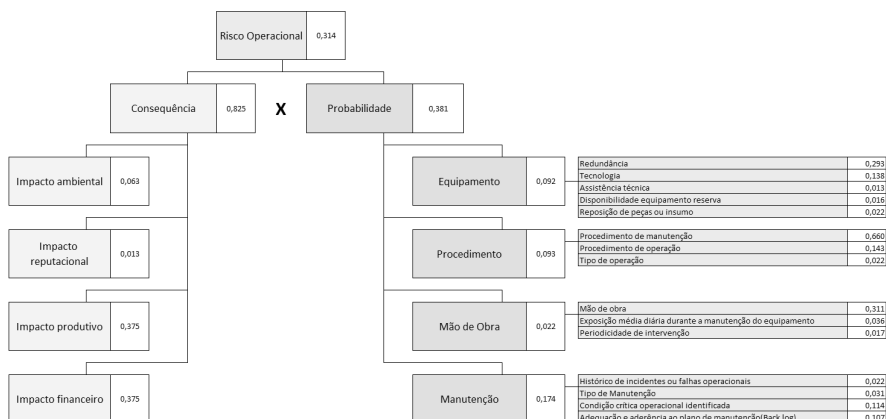
Aplicando o passo (2), o grupo de especialistas é definido com base em sua competência no trabalho com subestações de energia.

Aplicando o passo (3), as Tabelas 4 a 8 (<https://drive.google.com/drive/folders/1rpX21e41ad8AZimatbwZC9Y57L1U880>) são construídas. A seleção de critérios, subcritérios, escalas, definições e grupos de componentes é baseada em uma revisão da literatura sobre avaliação de riscos (National Fire Protection Association, 2018; Ekel *et al.*, 2016; International Organization for Standardization, 2018b; 2019; Saedi; Thambirajah; Pariatamby; Hilar, 2014; Ehlers, 2017; Taylor, 2017; Lim; Lam; Pei Qin Ng, 2018) conceitos de subestações de energia (Grigsby, 2012; McDonald, 2016), e entrevistas com engenheiros seniores muito experientes em subestações de energia. Além disso, a estratégia de negócios específica da empresa, estratégia ambiental e estratégia de manutenção são consideradas.

Os 12 grupos de componentes definidos pelos especialistas estão listados abaixo:

- 1) Sistema de proteção contra raios;
- 2) Sistema de chaves seccionadoras;
- 3) Sistema de manobra de disjuntores;
- 4) Sistema de energia auxiliar;
- 5) Cabeamento e barramentos;
- 6) Sistema de proteção, medição e controle;
- 7) Transformadores de energia e sistemas associados;
- 8) Sistemas de manobra e controle;
- 9) Banco de capacitores e reatores;
- 10) Sistema de aterramento;
- 11) Sistema de proteção contra incêndios;
- 12) Infraestrutura civil e aspectos gerais.

Aplicando os passos (4) e (5), a hierarquia para estruturar a avaliação de riscos é construída. A Figura 3 apresenta a proposta definida pelos especialistas. Os valores apresentados nesta figura exemplificam a avaliação da subestação de energia PS2. Os valores correspondentes são calculados aplicando o passo (9).

Figura 3. Hierarquia matemática PS2

A execução do passo (6) permite obter o vetor de prioridades que representam os pesos dos critérios (ω_j e ω_k) ou subcritérios (ω_f^k) (Saaty, 1980; 2013). As Tabelas 10, 12, 14, 16, 18 e 20 (<https://drive.google.com/drive/folders/1rpX21e4i1ad8AZimatbwZC9Y57L1U880>) representam as matrizes de comparação par a par de critérios e subcritérios analisados pelos especialistas. A consistência dos julgamentos foi verificada aplicando as seguintes expressões de Saaty (1980; 2013):

$$CR = \frac{CI}{RI} \quad (24)$$

e

$$CI = \frac{\lambda_{Max} - a}{a - 1} \quad (25)$$

onde CI é o Índice de Consistência, λ_{Max} corresponde ao maior autovalor da matriz A , a corresponde às dimensões da $dim(A) = (a \times a)$, CR é a Razão de Consistência e RI corresponde aos índices de consistência aleatória das matrizes. Os resultados dos cálculos de CR mostram que as comparações apresentadas pelos especialistas são satisfatórias ($CR \leq 0,10$) (Saaty, 1980; 2013). Os vetores de prioridades de cada critério e subcritério, λ_{Max} , a , RI e CR são representados pelas Tabelas 9, 11, 13, 15, 17 e 19 (<https://drive.google.com/drive/folders/1rpX21e4i1ad8AZimatbwZC9Y57L1U880>), respectivamente.

No passo (7), o questionário é preparado, considerando a escala linguística para cada critério ou subcritério, definida pelos especialistas. O uso do questionário, no passo (8), permite avaliar os riscos operacionais. Os dados coletados são baseados em entrevistas e análises de campo realizadas em conjunto com os técnicos responsáveis pelas subestações de energia. As Tabelas 21 e 22

(<https://drive.google.com/drive/folders/1rpX21e4i1ad8AZimatbwZC9Y57L1U880>) representam, por exemplo, o resultado da avaliação da subestação de energia PS2.

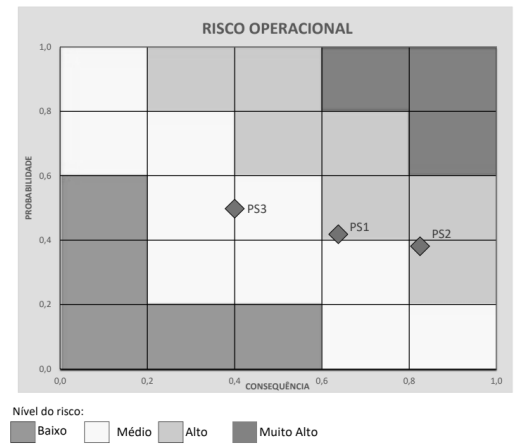
Aplicando o passo (9), os valores de P_i , C_i e R_i de cada subestação de energia são calculados, utilizando as Equações (17)-(23) e (1), respectivamente. Os resultados correspondentes são apresentados na Tabela 2.

Tabela 2. Resultado da avaliação de risco

Subestação	Probabilidade	Consequência	Nível de risco
PS1	0,418	0,638	0,267
PS2	0,381	0,825	0,314
PS3	0,498	0,400	0,199

A execução do passo (10) permite comparar, ordenar e/ou priorizar as subestações de energia, levando em consideração os valores de P_i , C_i e R_i . Esses valores estão presentes na Tabela 2 e são refletidos na Figura 4. É possível observar que as subestações de energia PS1 e PS2 estão localizadas na célula de alto risco, e a subestação de energia PS3 na célula de risco médio.

Figura 4. Resultado da avaliação de risco



O recurso total disponível para as três subestações de energia é $R = 3.000.000,00$ R\$. Portanto, as seguintes restrições devem ser consideradas:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3.000.000,00 \quad (26)$$

Além disso, as seguintes restrições relacionadas à demanda das subestações devem ser consideradas:

$$0 \leq x_1 \leq 465.000,00 \quad (27)$$

$$0 \leq x_2 \leq 1.866.000,00 \quad (28)$$

e

$$0 \leq x_3 \leq 1.116.000,00 \quad (29)$$

onde x_1 , x_2 e x_3 são as variáveis que correspondem ao volume de recursos procurados, e as demandas correspondentes (R\$465.000,00, R\$1.866.000,00 e R\$1.116.000,00) se referem ao investimento necessário para resolver o problema de risco operacional das três subestações de energia, respectivamente. Os objetivos são os seguintes:

- 1) Provisão predominante de recursos para subestações de energia com maior probabilidade de ocorrência operacional;
- 2) Provisão predominante de recursos para subestações de energia com maior impacto potencial no meio ambiente, na reputação, na produção e no impacto financeiro.

As variáveis P_i e C_i da Tabela 2 são utilizadas para construir as seguintes funções objetivas:

$$F_1(X) = 0,418x_1 + 0,381x_2 + 0,400x_3 \rightarrow \max \quad (30)$$

$$F_2(X) = 0,638x_1 + 0,825x_2 + 0,496x_3 \rightarrow \max \quad (31)$$

A solução foi encontrada utilizando a aplicação denominada Adaptive Interactive Decision Making System (AIDMS2), como mostrado na Figura 5. Ela implementa a alocação multiobjetiva de recursos baseada em conjuntos difusos (ou suas carências), conforme descrito em (Ekel. *et al*, 2006).

Figura 5. Aplicação do Adaptive Interactive Decision Making tem

AIDMS2 - Modelo 1 - Alocação de Recursos

Número de Funções: 2

Número de Variáveis: 3

Informação Inicial das Funções

	Objetivo	x1	x2	x3
F(1)	Maximizar	0.418	0.381	0.4
F(2)	Maximizar	0.638	0.825	0.496

Alocação dos Recursos

x1	x2	x3
465000	1714339	820661

Níveis de Satisfação

F(1)	F(2)
0.6607	0.6607

Fatores de Importância

F(1)	F(2)
1.00	1.00

Restrições das Variáveis

	Demandas
x1	465000
x2	1866000
x3	1116000

Recursos Disponíveis

3000000

Precisão

0,001

Calcular

Autovalor

2,00

Definir Fatores de Importância

Zerar Fatores

A solução para o problema de alocação de recursos financeiros está representada na Tabela 3. O resultado é considerado harmonioso (Ramalho *et al.*, 2019; Ekel; Pedrycz; Pereira Jr., 2020; Ekel *et al.*, 2006) e os níveis de satisfação das funções objetivas $F_1(X)$ e $F_2(X)$ são 0,6607 e 0,6607, respectivamente.

Tabela 3. Resultado da alocação de recursos financeiros

$x_1 [R\$]$	$x_2 [R\$]$	$x_3 [R\$]$
465.000,00	1.714.339,00	820.661,00

7. Discussão

Nesta pesquisa, ferramentas metodológicas para considerar informações de caráter qualitativo foram propostas e aplicadas para avaliar, comparar, priorizar e/ou ordenar subestações de energia do ponto de vista de riscos operacionais e alocar racionalmente recursos disponíveis para reduzir esses riscos operacionais.

A metodologia proposta permite que especialistas expressem suas opiniões para definir critérios e subcritérios, bem como seus pesos, aplicando métodos de tomada de decisão de múltiplos atributos. Os vetores de peso são obtidos por meio do método AHP. Sua aplicação, usando as opiniões dos especialistas, reduz as incertezas. Os resultados da avaliação de risco das subestações de energia são gerados por meio da aplicação de questionários que permitem a consideração de escalas linguísticas. Além disso, a

integração de critérios e subcritérios para construir uma chamada matriz de risco permite a preparação de informações para alocação de recursos. Em particular, para as três subestações de energia, suas demandas e restrições são definidas. Além disso, os objetivos são definidos para resolver o problema de alocação de recursos. Os modelos $\langle X, F \rangle$ são utilizados neste trabalho, pela primeira vez, para alocação de recursos em subestações de energia. Da mesma forma, a modificação da abordagem Bellman-Zadeh é aplicada para gerar soluções harmoniosas na análise dos modelos $\langle X, F \rangle$.

No Estudo de Caso, a Tabela 2 permite observar os níveis de risco das subestações de energia. A análise dos resultados mostra que a PS2 possui o maior nível de risco (Tabela 2 - 0,314), seguida pela PS1 (Tabela 2 - 0,267) e PS3 (Tabela 2 - 0,199). Os resultados da alocação de recursos financeiros (Tabela 3) indicam que as subestações de energia receberam: PS1: R\$465.000,00, PS2: R\$1.714.339,00 e PS3: R\$820.661,00. Essa alocação fornece uma solução harmoniosa (Eiself, Marianov, 2014; Ekel, 2002; Ekel *et al.*, 2006).

Com base na análise da matriz de risco, é fácil perceber que a subestação de energia PS2 possui um risco maior e requer mais consideração do que as subestações PS3 e PS1. Em contraste, a PS3 tem o maior valor de probabilidade do que a PS1 e PS2. A análise da matriz, sem considerar a otimização multiobjetivo, pode levar a gastar todos os recursos nas subestações PS1 e PS2. Nessa situação, a subestação de energia PS3 pode não ser mantida e suas condições operacionais podem ser comprometidas.

Um dos resultados importantes deste trabalho é a alocação de recursos disponíveis com base na avaliação de riscos, considerando simultaneamente os seguintes objetivos: probabilidade e consequência. O método ARS minimiza erros, evitando gastar todos os recursos financeiros em falhas altamente improváveis, enquanto falhas menos graves podem se manifestar com maior probabilidade.

8. Conclusão

A principal contribuição desta pesquisa é o desenvolvimento de um método para considerar informações qualitativas na alocação de recursos para redução do risco operacional em subestações de energia. Além disso, os modelos AHP e $\langle X, F \rangle$ são utilizados aqui pela primeira vez para alocar recursos disponíveis integrados aos conceitos de matriz de risco. A abordagem de Bellman-Zadeh é aplicada para gerar soluções harmoniosas na análise dos modelos $\langle X, F \rangle$.

O método proposto gera de maneira adequada objetivos que guiam a distribuição de recursos financeiros entre as subestações de energia, os quais geralmente são limitados. O uso racional de recursos financeiros contribui para a prevenção de acidentes pessoais e materiais, e para a redução de perdas na produção devido a falhas no processo de gestão.

Os resultados da pesquisa são ilustrados pela aplicação da metodologia em um Estudo de Caso de alocação de recursos financeiros com o objetivo de reduzir os riscos de três subestações de energia. A diferenciação desse método reside na possibilidade de reduzir a subjetividade na avaliação de riscos em subestações de energia e melhorar a qualidade das decisões tomadas para a alocação de recursos. Além disso, o método ARS

proporciona a redução das incertezas na construção das matrizes de risco. Os resultados existentes relacionados às matrizes de risco estão concentrados em sua construção e aplicações, e não consideram simultaneamente o total de recursos disponíveis, demandas e restrições para a alocação de recursos para redução do risco operacional.

Os resultados do Estudo de Caso fornecem informações importantes para a alocação de recursos com base na avaliação de riscos em subestações de energia. O método ARS integra aspectos de segurança, técnicos, de gestão e financeiros de subestações de energia de diferentes tecnologias, tamanhos e idades.

A metodologia possui características universais e pode ser utilizada em outros contextos nos quais é necessário alocar recursos financeiros para reduzir riscos de qualquer natureza.

Referências

- ALBRECHTSEN, E.; SOLBERG, I.; SVENSLI, E. The application and benefits of job safety analysis. **Safety Science**, v. 113, p. 425-437, 2019.
- BAKA, A. D.; UZUNOGLU, N. K. Analysis of Two Electrocution Accidents in Greece that Occurred due to Unexpected Re-energization of Power Lines. **Safety and Health at Work**, v. 5, n. 3, p. 158-160, Sep. 2014.
- BAO, C. *et al.* Comparison of different methods to design risk matrices from the perspective of applicability. **Procedia Computer Science**, v. 122, p. 455-462, 2017.
- BELLMAN, R. E.; ZADEH, L. A. Decision-making in a fuzzy environment. **Management Science**, v. 17, n. 4, p. 141-164, 1970.
- BERNARDES, P.; EKEL, P.; PARREIRAS, R. A new consensus scheme for multicriteria group decision making under linguistic assessments. In: MILOSAV, P.; ERCEGOVACA, I. (ed.). **Mathematics and mathematical logic: new research**. UK: Nova Science; 2009 p. 67-86. (Mathematics Research Developments).
- BERREDO, R. C. *et al.* Decision making in *fuzzy* environment and multicriteria power engineering problems. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, v. 33, n. 3, p. 623-632, Mar. 2011.
- BRENNER, B. C. Improving workplace Electrical Safety through Self- Assessment. In: 2013 IEEE IAS Electrical Safety Workshop, Dallas, TX, USA, 2013, p. 163-166. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/document/6509017>. Acesso em: 28 maio 2020.
- BURKOV, V.; KONDRAT'ev, V. **Mechanisms of functioning organizational systems**. Moscow: Nauka, 1981. (In Russian).
- CAMPBELL, R. **Fatal electrical injuries at work**. Quincy, MA: National Fire Protection Association, 2018. Disponível em: <https://www.ctif.org/sites/default/files/2018-05/osFatalElectricalInjuries.PDF>. Acesso em: 28 maio 2020.

- CAN, G. F.; TOKTAS, P. A novel *fuzzy* risk matrix based risk assessment approach. **Kybernetes**, v. 47, n. 9, p. 1721-1751, 2018.
- CIALKOWSKI, E. Layer of protection analysis as a multifunctional team problem solving tool. **Process Safety Progress**, v. 36, n. 3, p. 257-263, Sep. 2017.
- COX, L. A. What's Wrong with Risk Matrices?. **Risk Analysis**, v. 28, n. 2, p. 497-512, Apr. 2008.
- DALKEY, N.; HELMER, O. An experimental application of the DELPHI method to the use of experts. **Management Science**, v. 9, n. 3, p. 458-467, Apr. 1963.
- DIMOPOULOS, A. *et al.* Proposal for probabilistic risk assessment in grounding systems and its application to transmission substations. **IEEE Transactions on Power Delivery**, v. 27, n. 4, p. 2219-2226, Oct. 2012.
- DUIJM, N. J. Recommendations on the use and design of risk matrices. **Safety Science**, v. 76, p. 21-31, Jul. 2015.
- EHLERS, U. C. *et al.* Assessing the safety effects of cooperative intelligent transport systems: A bowtie analysis approach. **Accident Analysis & Prevention**, v. 99, pt. A, p. 125-141, Feb. 2017.
- EKEL, P. *et al.* Fuzzy set based models and methods of multicriteria group decision making. **Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications**, v. 71, n. 12, p. e409-e419, Dec. 2009.
- EKEL, P. I. *et al.* Multiobjective and multiattribute decision making in a fuzzy environment and their power engineering applications. **Information Sciences**, v. 361/362, p. 100-119, Sep. 2016.
- EKEL, P. Y. *et al.* Fuzzy set based multiobjective allocation of resources and its applications. **Computers & Mathematics with Applications**, v. 52, n. 1-2, p. 197-210, 2006.
- EKEL, P. Y.; MARTINI, J. S. C.; PALHARES, R. M. Multicriteria analysis in decision making under information uncertainty. **Applied Mathematics and Computation**, v. 200, n. 2, p. 501-516, Jul. 2008.
- EKEL, P. Y.; MENEZES, M.; SCHUFFNER NETO, F. H. Decision making in a *fuzzy* environment and its application to multicriteria power engineering problems. **Nonlinear Analysis: Hybrid Systems**, v. 1, n. 4, p. 527-536, Dec. 2007.
- EKEL, P. Y.; PEDRYCZ, W.; PEREIRA JR., J. G. **Multicriteria decision-making under conditions of uncertainty: a fuzzy set perspective**. Hoboken: John Wiley & Sons, 2020.
- FLOYD, H. L. A systems safety approach to occupational electrical safety. 2014 IEEE-IAS/PCA Cement Industry Technical Conference, National Harbor, MD, USA, 2014, pp. 1-17,

GAO, H. *et al.* Cyber security risk assessment of communication network of substation based on improved grey clustering. *In: 2014 TENTH INTERNATIONAL CONFERENCE ON INTELLIGENT INFORMATION HIDING AND MULTIMEDIA SIGNAL PROCESSING*, 2014, Kitakyushu, Japan. **Proceedings** [...]. New York: IEEE, 2014. p. 524-527.

GILL, P. **Electrical power equipment maintenance and testing**. 2. ed. Boca Raton, Flórida: CRC Press, 2008.

GRIGSBY, L. L. (ed.). **The electric power engineering handbook**. 3. ed. Boca Raton, Flórida: CRC Press, 2012.

GUO, J. *et al.* Security risk assessment and weaknesses identification of the substation automation system. *In: 2014 INTERNATIONAL CONFERENCE ON POWER SYSTEM TECHNOLOGYP*, 2014, Chengdu, China. **Proceedings** [...]. New York: IEEE, 2014. p. 1881-1888.

HSU, Wen-Kai K; HUANG, Show-Hui S.; TSENG, Wen-Jui. Evaluating the risk of operational safety for dangerous goods in airfreights: a revised risk matrix based on fuzzy AHP. **Transportation Research Part D: Transport and Environment**, v. 48, p. 235-247, 2016.

HUANG, Y. S. *et al.* Aggregation of utility-based individual preferences for group decision-making. **European Journal of Operational Research**, v. 229, n. 2, p. 462-469, Sep. 2013.

ILBAHAR, E.; CEBI, S.; KAHRAMAN, C. A state-of-the-art review on multi-attribute renewable energy decision making. **Energy Strategy Reviews**, v. 25, p. 18-33, Aug. 2019.

INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION. **ISO 31000:2018**: risk management: principles and guidelines. Geneva: ISO, 2018a.

INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION. **ISO 31010:2019**: risk management - risk management tech- niques. Geneva: ISO, 2019.

INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION. **ISO 45001:2018**: occupational health and safety management. Geneva: ISO, 2018b.

JAISE, J. *et al.* Power system: a reliability assessment using FTA. **International Journal of System Assurance Engineering and Management**, v. 4, n. 1, p. 78-85, 2013.

JANSEN, S. The multi-attribute utility method. *In: JANSEN, S.; COOLEN, H.; GOETGELUK, R. (ed.). The measurement and analysis of housing preference and choice*. Dordrecht, Netherlands: Springer, 2011. p. 101-125.

KANG, J.; SUN, L.; SOARES, C. G. Fault Tree Analysis of floating offshore wind turbines. **Renewable Energy**, v. 133, p. 1455-1467, 2019.

LI, J.; BAO, C.; WU, D. How to design rating schemes of risk matrices: a sequential updating approach. **Risk Analysis**, v. 38, n. 1, p. 99-117, 2018.

- LIM, C. H.; LAM, H. L.; PEI QIN NG, W. A novel HAZOP approach for literature review on biomass supply chain optimisation model. **Energy**, v. 146, p. 13-25, Mar. 2018.
- LIU, H. C. *et al.* Failure mode and effect analysis using multi-criteria decision making methods: a systematic literature review. **Computers & Industrial Engineering**, v. 135, p. 881-897, 2019.
- LIU, Y. *et al.* Quantifying the seismic risk for electric power distribution systems. **Structure and Infrastructure Engineering**, v. 17, n. 2, p. 217-232, 2021.
- LYU, H.-M. *et al.* Risk assessment using a new consulting process in fuzzy AHP. **Journal of Construction Engineering and Management**, v. 146, n. 3, Dec. 2019.
- MARKOWSKIAND, A. S.; MANNAN, M. S. Fuzzyriskmatrix. **Journal f Hazardous Materials**, v. 159, n. 1, p. 152-157, Nov. 2008.
- MCDONALD, J. D. **Electric power substations engineering**. 3. ed. Boca Raton, Flórida: CRC Press, 2016.
- NATIONAL FIRE PROTECTION ASSOCIATION. **NFPA 70E**: standard for electrical safety in the workplace. Quincy, MA: National Fire Protection Association, 2018.
- OMIDVAR, B.; AZIZI, R.; ABDOLLAHI, Y. Seismic risk assessment of power substations. **Environmental Energy and Economics International Research**, v. 1, n. 1, p. 45-62, 2017.
- PARK, S. D. Painful memories of an electrical accident. *In*: 2019 IEEE IAS Electrical Safety Workshop (ESW), Jacksonville, FL, USA, 2019. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/document/9024749>. Acesso em: 28 maio 2020.
- PARREIRAS, R. O. *et al.* A flexible consensus scheme for multicriteria group decision making under linguistic assessments. **Information Sciences**, v. 180, n. 7, p. 1075-1089, Apr. 2010.
- PEDRYCZ, W.; EKEL, P. Y.; PARREIRAS, R. O. **Fuzzy multicriteria decision-making**: models, methods and applications. Chichester: John Wiley & Sons, 2011.
- RAHMANI, A. *et al.* Descriptive study of occupational accidents and their causes among electricity distribution company workers at an eight-year period in Iran. **Safety and Health at Work**, v. 4, n. 3, p. 160-165, Sep. 2013.
- RAMALHO, F. *et al.* Multicriteria decision making under conditions of uncertainty in application to multiobjective allocation of resources. **Information Fusion**, v. 49, p. 249-261, Sep. 2019.
- ROBERTS, D. T. Applying risk assessment at the worker level: applications to electrical safety. **IEEE Industry Applications Magazine**, v. 25, n. 1, p. 18-24, 2019.
- RUAN, X.; YIN, Z.; FRANGOPOL, D. M. Risk matrix integrating risk attitudes based on Utility Theory. **Risk Analysis**, v. 35, n. 8, p. 1437-1447, Aug. 2015.

- SAATY, T. L. How to make a decision: the analytic hierarchy process. **European Journal of Operational Research**, v. 48, n. 1, p. 9-26, Sept. 1990.
- SAATY, T. L. **The analytical hierarchical process**. New York: J Wiley, 1980.
- SAATY, T. L.; PENIWATI, K. **Group decision making**: drawing out and reconciling differences. Pittsburgh: RWS publications, 2013.
- SAEDI, A. M.; THAMBIRAJAH, J. J.; PARIATAMBY, P. A HIRARC model for safety and risk evaluation at a hydroelectric power generation plant. **Safety Science**, v. 70, p. 308-315, Dec. 2014.
- SILVA, L. M. L. D. *et al.* Multiattribute spatial decision-making for qualitative information processing as applied to the renewable energy generating sites prospection. **IEEE Access**, v. 8, p. 137 745-137 757, 2020.
- SINGH, J.; SINGH, S.; SINGH, A. Distribution transformer failure modes, effects and criticality analysis (FMECA). **Engineering Failure Analysis**, v. 99, p. 180-191, 2019.
- SIQUEIRA, I. P. D.; SOUZA, B. A. Risk assessment of major accidents in large electric power plants. *In*: IEEE PES TRANSMISSION AND DISTRIBUTION CONFERENCE AND EXPOSITION. **Proceedings** [...]. IEEE PES T&D, 2010.
- SKLYAROV, V. F.; PRAKHOVNIK, A. V.; EKEL, P. Ya. On the multicriteria power consumption control. **Electronic Modeling**, v. 9, n. 5, p. 61-65, 1987. (In Russian).
- SKORUPSKI, J. The simulation-*fuzzi* method of assessing the risk of air traffic accidents using the *fuzzy* risk matrix. **Safety Science**, v. 88, p. 76-87, Oct. 2016.
- SMITH, E. D.; SIEFERT, W. T.; DRAIN, D. Risk matrix input data biases. **Systems Engineering**, v. 12, n. 4, p. 344-360, 2009.
- SOSSA, J. W. Z.; HALAL, W.; ZARTA, R. H. Delphi method: analysis of rounds, stakeholder and statistical indicators. **Foresight**, v. 21, n. 5, p. 525-544, 2019.
- SUTTON, I. Risk management. *In*: SUTTON, I. (ed.). **Process risk and reliability management**. Oxford: Gulf Professional Publishing, 2015. Chap. 1, p. 1-64.
- TANAKA, H. S. *et al.* Multiple criteria assessment of substation conditions by pairwise comparison of analytic hierarchy process. **IEEE Transactions on Power Delivery**, v. 25, n. 4, p. 3017-3023, Oct. 2010.
- TAYLOR, J. R. Automated HAZOP revisited. **Process Safety and Environmental Protection**, v. 111, p. 635-651, Oct. 2017.
- WEI, L. *et al.* Study on financial risk assessment of substation project based on Monte Carlo simulation. *In*: INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMMUNICATION SOFTWARE AND NETWORKS. 3., 2011, Xi'an, China. **Proceedings** [...]. New York: IEEE, 2011. p. 62-65.
- WHITE, J. R.; JAMIL, S. Electrical incidents and how they relate to NFPA 70E/CSA Z462. **IEEE Transactions on Industry Applications**, v. 56, n. 4, p. 3315-3321, 2020.

ZHANG, F.; CHEN, B. Risk assessment for substation operation based on triangular Fuzzy number AHP and cloud model. *In*: 2018 IEEE/PES TRANSMISSION AND DISTRIBUTION CONFERENCE AND EXPOSITION (T&D), 2018, Denver, CO, USA. **Proceedings** [...]. New York: IEEE, 2018. p. 1-5.

ZHOU, K. *et al.* Risk assessment for substation secondary system using graph theory and risk contagion model. *In*: 2017 CHINESE AUTOMATION CONGRESS (CAC), 2017, Jinan, China. **Proceedings** [...]. New York: IEEE, 2017. p. 66-71.

ZOU, Z. *et al.* Research and implementation of intelligent substation information security risk assessment tool. JOINT INTERNATIONAL INFORMATION TECHNOLOGY AND ARTIFICIAL INTELLIGENCE CONFERENCE, 8., 2019, Chongqing, China. **Proceedings** [...]. New York: IEEE, 2019. p. 1306-1310.

O conhecimento dos especialistas e o estresse cognitivo de avaliar muitas alternativas são importantes: uma nova perspectiva sobre o problema da inconsistência em comparações entre pares⁹

Matheus Pereira Libório, Petr Iakovlevitch Ekel, Patrícia Bernardes, Luiz Flávio Autran Monteiro Gomes, Douglas Alexandre Gomes Vieira, Laura Cozzi Ribeiro

1. Introdução

Estudos sobre indicadores compostos vêm ganhando importância na literatura de pesquisa operacional e já são encontrados em periódicos de destaque na área (Proudlove *et al.*, 2019; Bampatsou *et al.*, 2020; Camanho *et al.*, 2022; Zamani; Omrani, 2022; Boggia *et al.*, 2022). Os indicadores compostos e a investigação operacional têm uma relação estreita, pois ambos abordam problemas de natureza multicritério (El Gibari *et al.*, 2019). Além disso, a construção de indicadores compostos envolve operações matemáticas amplamente exploradas na literatura de pesquisa operacional: normalização (Lee; Yu, 2013), ponderação (Rogge, 2018) e agregação (Fusco, 2015), bem como medir a incerteza que cada uma dessas operações gera resultados (Cherchye *et al.*, 2008).

A ponderação é uma das operações matemáticas mais críticas na construção de indicadores compostos (Munda; Nardo, 2005; Becker *et al.*, 2017). Os pesos dos subindicadores são os mesmos no esquema de ponderação Equal Weights, extraídos dos dados do esquema de ponderação Data-Driven e da opinião de especialistas no esquema de ponderação Participativa (Greco *et al.*, 2019). Esta pesquisa está focada no esquema de ponderação participativa e apresenta uma abordagem para superar o problema da inconsistência quando especialistas avaliam alternativas por comparação aos pares.

A avaliação por comparação pareada é considerada altamente eficaz porque decompõe o problema de avaliar todas as alternativas simultaneamente em subproblemas nos quais apenas duas alternativas são comparadas simultaneamente (Ergu *et al.*, 2011). Contudo, tal simplificação implica na redundância de comparações a partir de comparações intermediárias (Bortot *et al.*, 2022). Assim, qualquer problema que envolva comparar mais de três alternativas está sujeito a avaliações inconsistentes (Lamata; Peláez, 2002).

A questão da inconsistência nas avaliações é crucial no processo de tomada de decisão, pois a confiabilidade dos vetores de prioridade das matrizes de comparação pareada depende do grau de inconsistência das avaliações (Bortot *et al.*, 2022). Embora seja esperado um certo grau de inconsistência, avaliações altamente inconsistentes sinalizam falta de competência e atenção nesse processo e baixa confiabilidade dos resultados (Bozóki *et al.*, 2015).

Pesquisadores indicam que os especialistas devem revisar suas avaliações para atingir um grau aceitável de inconsistência quando o número de alternativas a serem

⁹ **Reconhecimento:** A versão de registro deste artigo está publicada na *OPSEARCH*, e está disponível em: <https://doi.org/10.1007/s12597-023-00689-2>
LIBÓRIO, M. P.; EKEL, P. I.; BERNARDES, P.; GOMES, L. F. A. M.; VIEIRA, D. A. G. Specialists' knowledge and cognitive stress in making pairwise comparisons. *OPSEARCH*, 1-20, 2023.

avaliadas por comparação pareada for superior a seis (Amenta *et al.*, 2020). Além disso, o número de alternativas deve ser inferior a dez para que as comparações sejam realizadas de forma aceitável (Saisana; Tarantola, 2002; Greco *et al.*, 2019).

Não faltam estudos que tratam da consistência das avaliações realizadas por comparação pareada na literatura de tomada de decisão. No entanto, esta literatura concentra-se em apenas duas linhas. Uma linha desenvolve algoritmos capazes de melhorar a consistência das avaliações (Lamata; Peláez, 2002; Ergu *et al.*, 2011; Benítez *et al.*, 2011; 2012; Bozóki *et al.*, 2015; Zhou *et al.*, 2022). Outra linha propõe índices que medem a consistência das avaliações realizadas por comparação pareada (Saaty, 1980; Crawford; Williams, 1985; Koczkodaj, 1993; Salo; Hämäläinen, 1997; Amenta *et al.*, 2020). Essas duas linhas de investigação oferecem soluções para o problema da inconsistência das avaliações na comparação aos pares, mas não cobrem todas as lacunas associadas ao problema.

Os pesquisadores indicam que os algoritmos existentes são difíceis de implementar e não preservam as informações de comparação originais, uma vez que substituem a matriz original por uma nova matriz (Ergu *et al.*, 2011). Além disso, os estudos atuais não se preocupam em compreender mais profundamente as causas da inconsistência nas avaliações. Esses estudos sugerem que o problema ocorre devido a limitações no conhecimento sobre o tema da decisão (Ergu *et al.*, 2011) e devido ao estresse cognitivo dos especialistas ao avaliar muitas alternativas (Herrera-Viedma *et al.*, 2004; Ishizaka; Lusti, 2004; Greco *et al.*, 2019; Bortot *et al.*, 2022).

Esta pesquisa investiga o problema da inconsistência de avaliações na comparação pareada sob uma perspectiva inovadora. A pesquisa não desenvolve algoritmos ou índices de consistência. O objeto desta pesquisa é duplo. Primeiramente, investigar a relação entre a inconsistência das avaliações e o conhecimento dos especialistas sobre o tema de decisão. Segundo, introduzir uma abordagem simples capaz de reduzir o estresse cognitivo dos especialistas na avaliação dos pesos dos subindicadores de um indicador composto.

Esta pesquisa pretende contribuir para o avanço da literatura existente de três maneiras. Primeiramente, ampliar e aprofundar a literatura atual que relaciona o conhecimento do especialista sobre o tema de decisão com a inconsistência das avaliações na comparação pareada, pois esta relação só tem sido explorada do ponto de vista teórico-conceitual. Em segundo lugar, explorar o impacto do conhecimento especializado no problema da inconsistência das avaliações em comparação aos pares com o grau de inconsistência nas avaliações. Portanto, este estudo é pioneiro ao fornecer evidências empíricas da relação entre o grau de inconsistência das avaliações com dois tipos diferentes de conhecimento. Em terceiro lugar, preencher uma lacuna na literatura atual ao oferecer uma abordagem que reduza o estresse cognitivo dos especialistas quando o número de alternativas a serem avaliadas por comparação aos pares for alto. Esta abordagem tem um alto nível de aplicabilidade e universalidade na medida em que pode ser utilizada em problemas de tomada de decisão multicritério envolvendo comparação de pares. Essa contribuição tem implicações práticas importantes para a investigação operacional, especialmente para indicadores compostos, pois concilia simplicidade e rigor ao processo de ponderação de subindicadores com base na opinião de especialistas.

As demais partes desta pesquisa estão estruturadas da seguinte forma. A segunda seção discute a inconsistência das avaliações realizadas por comparação pareada, o estresse cognitivo exercido sobre os especialistas durante esse processo avaliativo e os fundamentos teórico-conceituais da abordagem introduzida para solucionar esse problema. A terceira seção apresenta os materiais e métodos utilizados para investigar o impacto do conhecimento especializado limitado no grau de inconsistência nas avaliações e na implementação da abordagem proposta. A quinta apresenta e analisa os resultados. Por fim, as conclusões são apresentadas na seção cinco.

2. *Framework* teórico

Os especialistas expressam opiniões sobre alternativas em problemas de tomada de decisão de diferentes maneiras. Na literatura especializada, essas formas de expressar opiniões são conhecidas como formato de preferências. Há um número expressivo de estudos sobre formatos de preferência, os trabalhos realizados por Chiclana *et al.* (1998; 2001), Pedrycz *et al.* (2011), Ramalho *et al.* (2019) e Ekel *et al.* (2019) fornecem informações abundantes sobre os principais aspectos teóricos, metodológicos e práticos do tema, subsidiando a discussão a seguir.

The most commonly used preference formats are: Ordering of Alternatives (**OA**), Utility Values (**UV**), Multiplicative Relations (**MR**), Hesitant Linguistic Preference Relation (**HLPR**), Probabilistic Preference Relation (**PLPR**), Distribution Linguistic Preference Relation (**DLPR**), *Fuzzy* Estimations (**FE**), and *Fuzzy* Relations, which can be Additive Reciprocal (**RR**), and Non-Reciprocal (**RN**). The decision on which format to use is associated with the: level of information uncertainty, the psychological disposition of the specialist, the specialist domain on the topic, and the nature of information, e.g., qualitative or quantitative (Pedrycz *et al.*, 2011).

There is no preferred format that is free from limitations. However, the operationalization of the **OA** format is considered simpler than the other formats. Decision-makers find it more challenging to evaluate alternatives quantitatively than to rank them. First, decision-makers have more confidence in the rankings of alternatives than in their respective values. Second, decision-makers often find it difficult to express how much one alternative is better than the other. Third, the evaluation effectiveness is impaired due to differences between the specialists' numerical interpretation of linguistic terms and the numerical representation of the model. Fourth, the quantitative evaluation of many alternatives exerts cognitive stress on decision-makers, resulting in inconsistent evaluations. This problem is potentiated when specialists evaluate alternatives by pairwise comparison through the **MR**, **HLPR**, **PLPR**, **DLPR**, **FE**, **RR**, and **RN** formats (Zhou *et al.*, 2022). This cognitive stress is greater in the pairwise comparison as the evaluation of n alternatives requires $n(n - 1)/2$ evaluations.

Não existe um formato preferido que esteja livre de limitações. Porém, a operacionalização do formato **OA** é considerada mais simples que os demais formatos. Os decisores consideram mais difícil avaliar as alternativas quantitativamente do que classificá-las. Primeiro, os decisores têm mais confiança nas classificações das alternativas do que nos seus respectivos valores. Em segundo lugar, os decisores muitas

vezes têm dificuldade em expressar até que ponto uma alternativa é melhor que a outra. Terceiro, a eficácia da avaliação é prejudicada devido a diferenças entre a interpretação numérica dos termos linguísticos pelos especialistas e a representação numérica do modelo. Quarto, a avaliação quantitativa de muitas alternativas exerce pressão cognitiva sobre os decisores, resultando em avaliações inconsistentes. Esse problema é potencializado quando especialistas avaliam alternativas por comparação pareada por meio dos formatos **RM**, **RPLH**, **RPP**, **RPLD**, **EF**, **AR** e **NR** (Zhou *et al.*, 2022). Esse estresse cognitivo é maior na comparação pareada, pois a avaliação de n alternativas requer $n(n-1)/2$ avaliações.

A comparação pareada de alternativas é uma forma de avaliação robusta e confiável, pois sua qualidade pode ser verificada por meio de índices que estimam a consistência das avaliações (Bortot *et al.*, 2022; Zhou *et al.*, 2022). Numerosos índices que estimam o grau de inconsistência das avaliações por comparação pareada são relatados na literatura: Índice de Consistência e Razão de Consistência (Saaty, 1980), Medida de Consistência (Koczkodaj, 1993), Medida de Consistência (Salo; Hämäläinen, 1997) e Índice de Consistência Geométrica (Crawford; Williams, 1985). Em suma, esses índices fornecem uma medida da associação de comparações pareadas com um número real que representa o grau de inconsistência da avaliação (Bozoki *et al.*, 2015; Amenta *et al.*, 2020). Para cada um desses índices, um valor limite indica se o grau de inconsistência da avaliação é aceitável. Em particular, o Índice de Consistência (**IC**) utilizado nesta pesquisa considera que uma matriz de comparação pareada é consistente e adequada para uso quando o **IC** < 0,10 (Saaty, 1980).

A avaliação de um elevado número de alternativas aumenta o estresse cognitivo dos especialistas e as chances do grau de inconsistência das avaliações ultrapassar os limites de aceitação do índice. Nessas situações, avaliar alternativas utilizando o formato **OA** é uma estratégia mais simples e rápida para obter um *ranking* de alternativas.

No entanto, muitos métodos de problemas de tomada de decisão multicritério exigem dezenas de alternativas. A ponderação dos subindicadores não é realizada a partir dos subindicadores ordenados por importância. Os pesos são pontuações que representam a importância relativa dos subindicadores no indicador composto e não podem ser representados por uma classificação. Além disso, o formato **OA** é problemático quando é necessário agregar ordenações realizadas por diferentes decisores numa ordenação coletiva, pois a literatura considera essa operação muito controversa (Bustince *et al.*, 2020).

Essas duas limitações reduzem substancialmente a gama de problemas que podem ser resolvidos através da aplicação do formato **OA**. Por exemplo, a avaliação pela **OA** não oferece uma solução viável para a definição dos pesos dos subindicadores do indicador composto. Então, como pesar os subindicadores aproveitando a simplicidade e rapidez de avaliação de alternativas no formato **OA**?

A literatura sobre funções de transformação de formato de preferência fornece algumas indicações para responder a essa questão. O emprego de diferentes formatos de preferência oferece conforto psicológico ao tomador de decisão na avaliação de alternativas, mas, ao mesmo tempo, resulta em informações heterogêneas. Diversos estudos na área de pesquisa operacional oferecem meios para tratar informações

heterogêneas. Em particular, os estudos de Zhang *et al.* (2004), Chen *et al.* (2015), Li *et al.* (2016), Zhang *et al.* (2019), Figueiredo *et al.* (2021), Wu e Liao (2021) e Libório *et al.* (2022) mostram que é possível homogeneizar avaliações em diferentes formatos aplicando funções de transformação.

Concebidas inicialmente para homogeneizar avaliações realizadas em diferentes formatos, as funções de transformação permitem a conversão de avaliações em formatos **OA** para outros formatos, possibilitando a definição de pesos a partir das avaliações convertidas. Essa abordagem permite aproveitar a facilidade e rapidez de avaliação de alternativas utilizando o formato **OA** para definir os pesos dos subindicadores a partir das avaliações convertidas para outros formatos. Contudo, essa abordagem não se limita a simplificar o processo de definição dos pesos dos subindicadores, pois a sua aplicação garante a consistência das avaliações (Chiclana *et al.*, 1998; Ramalho *et al.*, 2019).

3. Ponderação dos subindicadores com base na opinião de especialistas: o Índice de Custo de Fazer Negócios (ICFN)

O desenvolvimento desta pesquisa está dividido em três partes. A primeira parte investiga o impacto do conhecimento especializado no grau de inconsistência das avaliações. A segunda parte descreve a abordagem introduzida para reduzir o estresse cognitivo dos especialistas ao comparar um grande número de alternativas por comparação aos pares. Todas as partes estão associadas à definição dos pesos dos 17 subindicadores do indicador composto Índice de Custo de Fazer Negócios (ICFN).

O ICFN foi inicialmente proposto por Bernardes *et al.* (2022) para sinalizar a qualidade do ambiente institucional e de negócios nos países latino-americanos. O índice agrega os 17 subindicadores de custos do Índice de Facilidade de Fazer Negócios¹⁰ do Banco Mundial e está fortemente associado ao produto interno bruto dos países (Ekel *et al.*, 2022). Os dados do ICFN foram recolhidos do Banco de Dados do Banco Mundial: Doing Business (Grupo Banco Mundial, 2020).

3.1. Impacto do conhecimento especializado no grau de inconsistência nas avaliações

O desenvolvimento desta parte da pesquisa consiste em selecionar especialistas com dois tipos de conhecimento. O primeiro tipo de conhecimento está associado ao tema da decisão: o custo de fazer negócios. O segundo tipo de conhecimento está associado ao problema da inconsistência das avaliações na comparação pareada.

Dois grupos de especialistas foram formados com base nesses dois tipos de conhecimento. O Grupo A foi formado por cinco especialistas com conhecimento sobre os custos de fazer negócios, com mais de cinco anos de experiência profissional na área empresarial e formação acadêmica de bacharelado em administração ou superior. Cinco

¹⁰ O Índice Facilidade de Fazer Negócios agrega subindicadores que refletem a facilidade de fazer negócios em 190 países, sendo amplamente utilizado para analisar a qualidade do ambiente de negócios e sua relação com o crescimento econômico (Kuc-Czarnecka *et al.*, 2020).

especialistas sem conhecimento sobre os custos de fazer negócios formaram o Grupo B. Por sua vez, esse grupo foi formado por especialistas com conhecimento teórico sobre o problema de inconsistência de avaliações em comparação pareada, bem como experiência prática na avaliação de alternativas utilizando o formato **RM**.

Primeiramente, os cinco especialistas do Grupo B avaliaram os 17 subindicadores do ICFN utilizando o formato **RN** através de uma matriz $MR_{n \times n}$ de relações de preferência positivas e recíprocas $m(x_k, x_l), k, l = 1, \dots, n$, onde $m(x_k, x_l)$ é a intensidade de preferência pela alternativa x_k sobre x_l de acordo com a escala de Saaty (1977). Considerando que a comparação pareada de n alternativas requer $n(n-1)/2$ avaliações e que $n=17$, cada especialista do Grupo A e B realizou 136 avaliações.

Em segundo lugar, foram realizadas as ponderações individuais, normalizando as matrizes de avaliação e extraindo a média aritmética das colunas de cada linha da matriz. Em seguida, o índice de consistência foi calculado a partir dessas médias pela seguinte expressão:

$$CR = \left(\frac{\lambda_{max} - n}{n-1} \right) \div RI \quad (1)$$

onde λ_{max} é o autovalor máximo da matriz $MR_{n \times n}$, RI é o índice aleatório associado ao número de alternativas n . Para $n=17$, o valor do IR é igual a 1,59.

Por fim, os pesos coletivos foram obtidos agregando os pesos individuais de cada subindicador pela média aritmética. A partir desses pesos, o grau de consenso C^I individual e grupo C^G foi obtido através das seguintes expressões:

$$C^I = \sum_{l=1}^m \left(1 - \frac{|O^G(X_k) - O^{E_i}(X_k)|}{n-1} \right) \quad (2)$$

$$C^G = \frac{\sum_{k=1}^n C^I}{n} \quad (3)$$

onde $O^G(X_k)$ corresponde à posição do k -ésimo subindicador da opinião coletiva, $O^{E_i}(X_k)$ corresponde à k -ésima posição do subindicador da opinião especializada E_i .

3.2. Abordagem para reduzir o estresse cognitivo em especialistas comparando um grande número de alternativas

O desenvolvimento desta parte da pesquisa consiste na conversão das avaliações realizadas no formato **OA** para o formato **RM** e na definição dos subindicadores de pesos através do processamento das avaliações no formato **RM**. Essa abordagem foi implementada por dez especialistas com conhecimento dos custos de fazer negócios e que atendiam aos mesmos requisitos do Grupo A.

Os dez especialistas do chamado Grupo C avaliaram os subindicadores por meio do **OA**. O formato **OA** é expresso através de um vetor $O = [o(x_1), o(x_2), \dots, o(x_k) \dots, o(x_n)]$, onde $o(x_k)$ é uma função de troca que indica a posição do subindicador x_k entre os valores inteiros $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. Dentre esses valores

inteiros, 1 é o subindicador que mais impacta os custos de fazer negócios e n é o subindicador com menor impacto. As dez avaliações no formato **OA** foram convertidas para o formato **RM** através da função de transformação:

$$OA \rightarrow RM(X_k X_l) = m^{\left(\frac{O_l - O_k}{n-1}\right)}, n > 1 \quad (4)$$

onde $X_k X_l$ é a relação de preferência entre X_k e X_l , O_l e O_k são a ordem da l -ésima e k -ésima alternativa, $m = 9$, correspondendo ao limite superior da escala proposta por Saaty (1977, p. 246) para a construção da matriz de relacionamento multiplicativo **RM**($X_k X_l$).

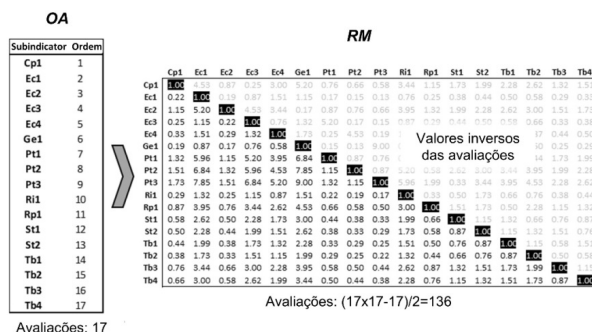
Esta conversão permite obter dez matrizes **RM** _{$n \times n$} de relações de preferência recíprocas, com razão de consistência igual a zero, uma vez que a transitividade das avaliações é preservada pela função de transformação (Chiclana *et al.*, 1998; Ekel *et al.*, 1998; Ekel *et al.*, 1998; Ekel *et al.*, 2011). A função de transformação (4) foi escolhida para que os resultados obtidos pelos dois formatos de avaliação sejam totalmente comparáveis. Além disso, o formato **RM** está associado a um dos métodos de tomada de decisão multicritério mais populares na literatura: o Processo Hierárquico Analítico (Saaty, 1989).

4. Resultados e discussões

A simplificação do processo de avaliação que converte os subindicadores ordenados por importância em pesos permite chegar a quatro conclusões principais. Primeiro, a conversão das avaliações no formato **OA** para o formato **RM** elimina a necessidade de rever avaliações inconsistentes. Em segundo lugar, a função de transformação que converte as avaliações no formato **OA** para o formato **RM** permite obter matrizes com uma taxa de consistência superior ao limite de aceitação de dez por cento. Terceiro, o número de avaliações cai significativamente quando se opta pelo formato **OA** em vez do formato **RM**. O formato **OA** exige 17 avaliações, enquanto o formato **RM** exige 136 avaliações. Quarto, o processo de avaliação é simplificado quando especialistas avaliam alternativas no formato **OA**. Em média, os dez especialistas que ordenaram os subindicadores por ordem de importância avaliaram as 17 alternativas em 4 minutos.

A Figura 1 ilustra o volume de avaliações a serem realizadas nos casos de aplicação do formato **OA** e do formato **RM**, respectivamente, para um problema com 17 alternativas.

Figura 1. Diferença entre o número de avaliações realizadas pelos formatos OA e RM



Nota: A Tabela 2 apresenta os subindicadores ordenados por importância segundo os dez especialistas do Grupo C e está disponível em <https://drive.google.com/drive/folders/1rpX21e4i1ad8AZimatbwZC9Y57L1U880?usp=sharing>.

A Figura 1 revela que avaliar as 17 alternativas utilizando o formato OA, e transformar essas avaliações para o formato RM, é muito mais racional do que avaliar 136 alternativas diretamente utilizando o formato RM.

A transformação das avaliações no formato OA para o formato RM reduz em oito vezes o número de avaliações necessárias para atribuir pesos aos subindicadores. Essa redução permite que os especialistas do Grupo C avaliem as 17 alternativas em muito menos tempo do que os especialistas do Grupo A e do Grupo B. Os especialistas do Grupo C gastam 7,5 e 4,8 vezes menos tempo avaliando alternativas do que os especialistas dos Grupos A e B, respectivamente. O menor estresse cognitivo dos especialistas do Grupo C, resultante da simplificação do processo de avaliação, permite a obtenção de um grau de consenso satisfatório.

A Tabela 1 mostra um grau de consenso de $C^G=0,78$ para o Grupo C e $C^G=0,81$ para o Grupo A. Porém, é necessário considerar que o Grupo C possui o dobro de especialistas do Grupo A e que as avaliações dos especialistas do Grupo A são inconsistentes. Além disso, o grau de consenso é superior a 0,70 para os dezesseis subindicadores do Grupo C e para os dezesseis subindicadores do Grupo A (ver Tabela 6 em <https://drive.google.com/drive/folders/1rpX21e4i1ad8AZimatbwZC9Y57L1U880?usp=sharing>). O índice de consistência das matrizes geradas pelas avaliações dos especialistas do Grupo A é, em média, de 0,39, ultrapassando o limite de aceitação de 0,10.

Tabela 1. Tempo de avaliação, Razão de consistência e Grau de consenso dos Grupos A-C

	Formato da avaliação	Número de especialistas	Número de avaliações	Tempo de avaliação	Razão de consistência	Grau de consenso
Grupo A	RM	5	136	31',24"	0,39	0,81
Grupo B	RM	5	136	21',00"	0,23	0,67
Grupo C	OA	10	17	04',11"	0,00	0,78

Nota: As Tabelas 3 a 5 apresentam o Tempo de avaliação, Razão de consistência e Grau de consenso para cada especialista dos Grupos A-C e estão disponíveis em <https://drive.google.com/drive/folders/1rpX21e4i1ad8AZimatbwZC9Y57L1U880?usp=sharing>.

As avaliações realizadas no formato **RM** demoram em média 26,7 minutos. Porém, os especialistas do Grupo A gastaram 1,57 vezes mais tempo avaliando os 17 subindicadores do que os especialistas do Grupo B. As avaliações dos especialistas foram realizadas em menor tempo no Grupo B do que no Grupo A. O índice de consistência das matrizes em O Grupo B é 59% inferior ao Grupo A, em média. Esses resultados sugerem que o rácio de consistência depende mais do conhecimento sobre o problema da inconsistência das avaliações em comparação aos pares do que do conhecimento sobre o custo de fazer negócios. Entretanto, os resultados mostram que o conhecimento sobre o problema da inconsistência de avaliações em comparações pareadas não é suficiente para obter matrizes com razões de consistência aceitáveis quando o número de comparações pareadas é alto.

Além disso, a falta de conhecimento sobre o custo de fazer negócios impacta drasticamente o grau de consenso. O grau de consenso entre os especialistas do Grupo B é de apenas 0,67. Esses resultados mostram que conhecer o custo de fazer negócios aumenta o grau de consenso. O grau de consenso entre os especialistas do Grupo B, que não têm conhecimento sobre os custos de fazer negócios, é 14% menor que o do Grupo C e 17% menor que o do Grupo A.

Esses resultados sugerem que transferir conhecimento sobre o problema da inconsistência das avaliações na comparação pareada para o tomador de decisão é uma etapa capaz de reduzir a razão de consistência das matrizes. Contudo, os resultados indicam que essa transferência de conhecimento pode ser insuficiente. Duas estratégias podem ser usadas nessa situação. A primeira estratégia é amplamente utilizada na literatura e está associada à reavaliação das alternativas. Essa estratégia visa reduzir a inconsistência das avaliações. Contudo, não garante que o índice de consistência das matrizes atingirá o limite de aceitação, uma vez que não reduz o número de avaliações necessárias.

A segunda estratégia está associada à adoção da abordagem simplificada de avaliação de alternativas introduzida nesta pesquisa. Essa abordagem reduz o número de

avaliações usando funções de transformação que convertem avaliações do formato **OA** para o formato **RM**. Essa conversão permite obter os pesos dos 17 subindicadores de forma rápida, consistente e com grau de consenso satisfatório.

5. Conclusões

Os resultados desta investigação permitem-nos concluir que o conhecimento sobre a consistência das avaliações permite obter matrizes com um índice de consistência inferior ($CR=0,23$) ao conhecimento sobre o problema do custo de fazer negócios ($CR=0,39$). Esse conhecimento não impede que o índice de consistência das matrizes ultrapasse o limite de aceitação de 0,10. Porém, transferir o conhecimento sobre a consistência das avaliações para especialistas que não possuem esse conhecimento é uma estratégia útil para reduzir o índice de consistência das matrizes.

A simplificação do processo de avaliação em que as alternativas ordenadas por importância são convertidas em pesos tem a vantagem de obter matrizes confiáveis em menor tempo e com grau de consenso satisfatório. A transformação das avaliações no formato **OA** para o formato **RM** tem como uma de suas principais propriedades a manutenção da consistência das avaliações. Especialistas com conhecimento do custo de fazer negócios precisam de 31 minutos e 24 segundos para avaliar as dezessete alternativas no formato **RM** e 4 minutos e 11 segundos no formato **OA**. O grau de consenso alcançado por esse processo simplificado é satisfatório, considerando o tempo necessário para as avaliações e a quantidade de especialistas que avaliaram as alternativas. O grau de consenso entre os dez especialistas do Grupo C que avaliaram as dezessete alternativas em 4 minutos e 11 segundos foi $C^G=0,78$. Esse resultado é 0,03 menor que os cinco especialistas do Grupo A, que precisaram de 26 minutos e 47 segundos a mais para avaliar as mesmas dezessete alternativas. Além disso, os dezessete subindicadores do Grupo C apresentam grau de consenso superior a 0,70. Esse número cai para dezesseis subindicadores para o Grupo A e seis subindicadores para o Grupo B (ver Tabela 6 em <https://drive.google.com/drive/folders/1rpX21e4i1ad8AZimatbwZC9Y57L1U880?usp=sharing>).

As contribuições desta pesquisa possuem alto grau de universalidade e aplicabilidade em problemas de tomada de decisão envolvendo comparações pareadas e alto potencial de apropriação por pesquisadores e profissionais da área de pesquisa operacional. O desconhecimento do decisor sobre o problema da inconsistência nas comparações pareadas impacta fortemente o índice de consistência das avaliações. Instruir o tomador de decisão sobre esse problema aumenta a consistência de suas avaliações, sendo uma solução alternativa aos algoritmos de redução de inconsistências, que são desafiadores para implementar e modificar a matriz de avaliação original. Reduzir a inconsistência das avaliações através da transferência de conhecimento é extremamente fácil, mas extremamente importante para a ponderação dos subindicadores pela opinião de especialistas, porque permite avaliações mais precisas e reduz a necessidade de reavaliações.

O benefício de instruir o decisor sobre o problema das avaliações inconsistentes é de âmbito limitado. Problemas que envolvem um grande número de alternativas aumentam as chances de que o limite de aceitação do índice de inconsistência seja excedido. Essas situações são especialmente aderentes à abordagem introduzida nesta pesquisa, que permite obter os pesos dos subindicadores ordenando as alternativas e convertendo-as em matrizes de comparação pareada. As possibilidades de implementação dessa abordagem na ponderação dos subindicadores são extensas e relevantes. Os indicadores compostos são geralmente construídos com mais de dez subindicadores (por exemplo, Índice de Facilidade de Fazer Negócios, Índice de Objetivos de Desenvolvimento Sustentável e Índice de Inovação Global). Além disso, as pontuações dos indicadores compostos são altamente sensíveis aos pesos, e mesmo pequenas diferenças nos pesos alteram as posições dos países na classificação.

Referências

- AMENTA, P.; LUCADAMO, A.; MARCARELLI, G. On the transitivity and consistency approximated thresholds of some consistency indices for pairwise comparison matrices. **Information Sciences**, v. 507, 274-287, Jan. 2020.
- BAMPATSOU, C.; HALKOS, G.; ASTARA, O. H. Composite indicators in evaluating tourism performance and seasonality. **Operational Research**, v. 22, n. 3, p. 2373-2396, Jul. 2022.
- BECKER, W. *et al.* Weights and importance in composite indicators: closing the gap. **Ecological Indicators**, 80, 12-22, Sep. 2017.
- BENÍTEZ, J. *et al.* Achieving matrix consistency in AHP through linearization. **Applied Mathematical Modelling**, v. 35, n. 9, p. 4449-4457, Sep. 2011.
- BENÍTEZ, J. *et al.* Improving consistency in AHP decision-making processes. **Applied Mathematics and Computation**, v. 219, n. 5, p. 2432-2441, Nov. 2012.
- BERNARDES, P. *et al.* Cost of doing business index in Latin America. **Quality & Quantity: International Journal of Methodology**, v. 56, n. 4, p. 2233-2252, Aug. 2022.
- BOGGIA, A. *et al.* Using accounting dataset for agricultural sustainability assessment through a multi-criteria approach: an Italian case study. **International Transactions in Operational Research**, v. 30, n. 4, p. 2071-2093, Jul. 2023.
- BORTOT, S. *et al.* A novel perspective on the inconsistency indices of reciprocal relations and pairwise comparison matrices. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 454, p. 74-99, Feb. 2023.
- BOZÓKI, S.; FÜLÖP, J.; POESZ, A. On reducing inconsistency of pairwise comparison matrices below an acceptance threshold. **Central European Journal of Operations Research**, v. 23, p. 849-866, 2015.

- BUSTINCE, H. *et al.* Aggregation of individual rankings through fusion functions: criticism and optimality analysis. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, v. 30, n. 3, p. 638-648, Mar. 2022.
- CAMANHO, A. S. *et al.* The assessment of performance trends and convergence in education and training systems of european countries. **European Journal of Operational Research**, v. 305, n. 1, p. 356-372, Feb. 2023.
- CHEN, X.; ZHANG, H.; DONG, Y. The fusion process with heterogeneous preference structures in group decision making: A survey. **Information Fusion**, v. 24, p. 72-83, Jul. 2015.
- CHERCHYE, L. *et al.* Creating composite indicators with DEA and robustness analysis: the case of the Technology Achievement Index. **Journal of the Operational Research Society**, v. 59, n. 2, p. 239-251, 2008.
- CHICLANA, F.; HERRERA, F.; HERRERA-VIDEIRA, E. Integrating three representation models in fuzzy multipurpose decision making based on fuzzy preference relations. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 97, n. 1, p. 33-48, Jul. 1998.
- CHICLANA, F.; HERRERA, F.; HERRERA-VIDEIRA, E. Integrating multiplicative preference relations in a multipurpose decision-making model based on fuzzy preference relations. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 122, n. 2, p. 277-291, Sep. 2001.
- CRAWFORD, G.; WILLIAMS, C. A note on the analysis of subjective judgment matrices. **Journal of Mathematical Psychology**, v. 29, n. 4, p. 387-405, Dec. 1985.
- EKEL, P. *et al.* South American business environment cost index: reforms for Brazil. **International Journal of Business Environment**, v. 13, n. 2, p. 212-233, 2022.
- EKEL, P. Y.; PEDRYCZ, W.; PEREIRA JR., J. G. **Multicriteria decision-making under conditions of uncertainty: a fuzzy set perspective**. Hoboken: John Wiley & Sons, 2020.
- EL GIBARI, S.; GÓMEZ, T.; RUIZ, F. Building composite indicators using multicriteria methods: a review. **Journal of Business Economics**, v. 89, n. 1, p. 1-24, Feb. 2019.
- ERGU, D. *et al.* A simple method to improve the consistency ratio of the pair-wise comparison matrix in ANP. **European Journal of Operational Research**, v. 213, n. 1, p. 246-259, Aug. 2011.
- FIGUEIREDO, L. R. *et al.* Group decision-based construction of scenarios for multicriteria analysis in conditions of uncertainty on the basis of quantitative and qualitative information. **Group Decision and Negotiation**, v. 30, n. 3, p. 665-696, Mar. 2021.
- FUSCO, E. Enhancing non-compensatory composite indicators: A directional proposal. **European Journal of Operational Research**, v. 242, n. 2, p. 620-630, 2015.

- GRECO, S. *et al.* On the methodological framework of composite indices: A review of the issues of weighting, aggregation, and robustness. **Social Indicators Research**, v. 141, n. 1, p. 61-94, 2019.
- HERRERA-VIDEIRA, E. *et al.* Some issues on consistency of fuzzy preference relations, **European Journal of Operational Research**, v. 154, n. 1, p. 98-109, Apr. 2004.
- ISHIZAKA, A.; LUSTI, M. An expert module to improve the consistency of AHP matrices. **International Transactions in Operational Research**, v. 11, n. 1, p. 97-105, Jan. 2004.
- KOCZKODAJ, W. W. A new definition of consistency of pairwise comparisons. **Mathematical and Computer Modelling**, v. 18, n. 7, p. 79-84, Oct. 1993.
- KOU, G.; ERGU, D.; SHANG, J. Enhancing data consistency in decision matrix: Adapting Hadamard model to mitigate judgment contradiction. **European Journal of Operational Research**, v. 236, n. 1, p. 261-271, Jul. 2014.
- KUC-CZARNECKA, M.; LO PIANO, S.; SALTELLI, A. Quantitative storytelling in the making of a composite indicator. **Social Indicators Research**, v. 149, n. 3, p. 775-802, Jan. 2020.
- LAMATA, M. T.; PELÁEZ, J. I. A method for improving the consistency of judgements. **International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems**, v. 10, n. 06, p. 677-686, 2002.
- LEE, S. K.; YU, J. H. Composite indicator development using utility function and fuzzy theory. **Journal of the Operational Research Society**, v. 64, n. 8, p. 1279-1290, 2013.
- LI, G.; KOU, G.; PENG, Y. A group decision making model for integrating heterogeneous information. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems**, v. 48, n. 6, p. 982-992, Jun. 2018.
- LIBÓRIO, M. P. *et al.* Fuzzy set based intra-urban inequality indicator. **Quality & Quantity: International Journal of Methodology**, v. 56, n. 2, p. 667-687, Apr. 2022.
- MUNDA, G.; NARDO, M. **Constructing consistent composite indicators: the issue of weights.**, Luxembourg: Institute for the Protection and Security of the Citizen, 2005.
- PEARSON, K. LI. On lines and planes of closest fit to systems of points in space. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, v. 2, n. 11, p. 559-572, 1901.
- PEDRYCZ, W.; EKEL, P.; PARREIRAS, R. **Fuzzy multicriteria decision-making: models, methods, and applications.** Chichester: John Wiley & Sons, 2011.
- PROUDLOVE, N. C. *et al.* The signal in the noise: Robust detection of performance “outliers” in health services. **Journal of the Operational Research Society**, v. 70, n. 7, p. 1102-1114, 2019.

- RAMALHO, F. *et al.* Multicriteria decision making under conditions of uncertainty in application to multiobjective allocation of resources. **Information Fusion**, v. 49, p. 249-261, Sep. 2019.
- ROGGE, N. Composite indicators as generalized benefit-of-the-doubt weighted averages. **European Journal of Operational Research**, v. 267, n. 1, p. 381-392, 2018.
- SAATY, T. **The analytic hierarchy process**. New York: McGraw-Hill, 1980.
- SAATY, T. L. A scaling method for priorities in hierarchical structures. **Journal of Mathematical Psychology**, v. 15, n. 3, p. 234-281, Jun. 1977.
- SAISANA, M.; TARANTOLA, S. **State-of-the-art report on current methodologies and practices for composite indicator development**. Ispra, Italy: European Commission. Joint Research Centre. Institute for the Protection and the Security of the Citizen. Technological and Economic Risk Management Unit, 2002.
- SALO, A. A.; HÄMÄLÄINEN, R. P. On the measurement of preferences in the analytic hierarchy process. **Journal of Multi-Criteria Decision Analysis**, v. 6, n. 6, p. 309-319, Nov. 1997.
- THE WORLD BANK GROUP. **DataBank: doing business 2020**. Washington, DC: The World Bank Group, 2020. Disponível em: <https://databank.worldbank.org/source/doing-business>. Acesso em: 5 maio 2022.
- WU, Z.; LIAO, H. A consensus reaching process for large-scale group decision making with heterogeneous preference information. **International Journal of Intelligent Systems**, v. 36, n. 9, p. 4560-4591, 2021.
- XIA, M.; XU, Z.; CHEN, J. Algorithms for improving consistency or consensus of reciprocal $[0, 1]$ -valued preference relations. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 216, p. 108-133, Apr. 2013.
- ZAMANI, K.; OMRANI, H. A complete information PCA-imprecise DEA approach for constructing composite indicator with interval data: an application for finding development degree of cities. **International Journal of Operational Research**, v. 44, n. 4, p. 522-549, Aug. 2022.
- ZHANG, B.; DONG, Y.; HERRERA-VIDEIA, E. Group decision making with heterogeneous preference structures: An automatic mechanism to support consensus reaching. **Group Decision and Negotiation**, v. 28, n. 3, p. 585-617, Jun. 2019.
- ZHANG, Q.; CHENA, J. C. H.; CHONG, P. P. Decision consolidation: criteria weight determination using multiple preference formats. **Decision Support Systems**, v. 38, n. 2, p. 247-258, Nov. 2004.
- ZHOU, M. *et al.* Towards achieving consistent opinion fusion in group decision making with complete distributed preference relations. **Knowledge-Based Systems**, v. 236, p. 107740, Jan. 2022.

Sobre os autores

Douglas Alexandre Gomes Vieira: Pós-doutorado em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). Doutorado em Engenharia Elétrica pela UFMG. Graduação em Engenharia Elétrica pela UFMG. Trabalhou como pesquisador Associado no Imperial College London. Serve como revisor de revistas internacionais e participa da organização de conferências no exterior. Atualmente é Diretor Executivo do ENACOM Handcrafted Technologies e participa do Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais.

Eduarda Asfora Frej: Doutorado em Engenharia de Produção pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). Mestrado em Engenharia de Produção pela UFPE. Graduação em Engenharia de Produção pela UFPE. É professora da Universidade Federal de Pernambuco (Adjunto), e vice-coordenadora do Centro de Desenvolvimento de Sistemas de Informação de Decisão. Atua como docente permanente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da UFPE. Além disso, é Membro do Corpo Editorial do Group Decision and Negotiation Journal.

Eduardo Antônio de Castro: Mestrando em Desenvolvimento Regional e Meio Ambiente pela Universidade do Estado de Minas Gerais. É graduado em Engenharia Civil pelo Centro Universitário do Sul de Minas. Especialista em Engenharia de Prevenção e Combate a Incêndio pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, com certificação adicional de Formador de Brigada Orgânica Básica pelo Corpo de Bombeiros Militar de Minas Gerais. Assessor de Comunicação e Marketing do Crea Minas Júnior. Coordenador Geral Adjunto do CreaJr-MG Núcleo Varginha. É membro do corpo editorial da revista Ciência Et Práxis nas áreas de engenharia civil e planejamento urbano e regional.

Felipe Diniz Ramalho: Mestrado em Engenharia Elétrica pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Recebeu seu título de pós-graduação em Engenharia Portuária pela Universidade Federal do Maranhão. Tem experiência com engenharia de software e iniciou como Cientista de Dados no Hospital Israelita Albert Einstein, onde vem desenvolvendo projetos com o uso de Inteligência Artificial, principalmente voltados para alocação de recursos e eficiência operacional.

Gustavo Luís Soares: Doutorado em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), com colaboração na Université de Brest, França. Mestrado em Engenharia Elétrica pela UFMG. Graduação em engenharia elétrica pela UFMG. É professor na Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais e é especialista em tomada de decisão, otimização robusta e algoritmos evolucionários.

Henrique Silva Schuffner: Mestrado em Tomada de Decisão Multicritério pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC Minas). Graduação em

Engenharia Elétrica pela PUC-MG e pós-graduado em Gestão e Finanças pela Fundação Dom Cabral.

Igor Marques Reis: Graduando em Ciência da Computação pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Atua como Analista de Dados/Analista Quantitativo na empresa Soluções de Software Inteligentes, onde é encarregado de realizar tarefas de ETL e visualização de dados, auxiliar na gestão da infraestrutura de dados da Companhia, criar e manter soluções responsáveis pela identificação, avaliação e seleção de estratégias automatizadas de day trade, entre outras funções.

Ilya Kokshenev: Doutorado em Engenharia Elétrica na Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). Mestrado em Ciências da Computação da Universidade Nacional de Radioeletrônica de Kharkiv (Ucrânia). Graduação em Sistemas Inteligentes de Tomada de Decisões pela UFMG. Atua como pesquisador, consultor e desenvolvedor de ferramentas computacionais com foco em Machine Learning, Visão Computacional, Otimização e Tomada de Decisão Multicritério.

Joel Gomes Pereira Júnior: Doutorado em Engenharia Elétrica na Universidade Federal de Minas Gerais. Mestrado em Engenharia Elétrica pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC Minas). Graduação em Ciência da Computação pela PUC Minas. Atua como pesquisador, consultor e desenvolvedor de software.

Kenedy Marconi Geraldo dos Santos: Doutorado em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal da Bahia. Mestrado em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal de Minas Gerais. Graduação em Engenharia Elétrica pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Atualmente é Professor efetivo do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia e leciona no curso de Eng. Elétrica. É membro do comitê de revisores das Revistas: IEEE América Latina e Journal of Microwaves, Optoelectronics and Electromagnetic Applications.

Laura Cozzi Ribeiro: Mestranda no Programa de Pós Graduação em Informática pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC Minas). Bacharel em Ciência da Computação pela PUC-MG. Atua como Desenvolvedora de Software.

Leticia Ribeiro Figueiredo: Mestrado em Engenharia Elétrica na área de Otimização e Tomada de Decisão pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC Minas). Bacharel em Engenharia de Controle e Automação pela PUC Minas. Atualmente, trabalha como Engenheira Eletrônica na área de Instrumentação e Controle.

Lívia Maria Leite Da Silva: Doutorado em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal de Minas Gerais. Mestrado em Engenharia Elétrica pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC Minas). Graduação em Engenharia de Energia PUC Minas. Atualmente trabalha como consultora em energia na empresa Thunders Tecnologia que desenvolve soluções para o mercado de energia elétrica.

Luiz Flávio Autran Monteiro Gomes: Doctor of Philosophy in Engineering pela University of California (Berkeley). Master of Science in Engineering pela Michigan State University. Graduação em Engenharia Civil pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio). Professor universitário e pesquisador da PUC-Rio. É pesquisador colaborador na Universidade Federal do ABC. Fellow da International Academy of Information Technology and Quantitative Management, desde 2022. Detentor do Siwei Cheng Award, concedido pela International Academy of Information Technology and Quantitative Management. É Membro Titular da Academia Nacional de Engenharia e Oficial da Ordem do Mérito Cartográfico.

Marcos Marcos Flávio Silveira Vasconcelos D'Angelo: Doutorado em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal de Minas Gerais. Mestrado em Engenharia Elétrica pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC Minas). Graduação em Engenharia Elétrica pela PUC Minas. É pesquisador em Engenharia Elétrica, com foco em detecção de falhas e automação. Trabalha na Universidade Estadual de Montes Claros e tem publicações em renomados congressos e revistas científicas.

Mateus Alberto Dorna de Oliveira Ferreira: Mestrando em Informática no Programa de Pós Graduação em Informática pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC Minas) na área de Tomada de Decisão Multicritério. Bacharel em Ciência da Computação pela PUC Minas. Atualmente trabalha como Engenheiro de Software no setor privado.

Mateus Toledo da Silveira Leão: Mestre em Informática pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC Minas).

Matheus Pereira Libório: Pós-doutorado em Engenharia de Produção e Transporte pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC Minas). Doutorado em Administração pela PUC Minas. Mestrado em Geografia pela PUC Minas. Bacharel em Administração de Empresas e em Ciências Econômicas pela Faculdade de Estudos Administrativos de Minas Gerais. Especialista em indicadores compostos, é o sexto pesquisador com mais publicações sobre o tema segundo a base Scopus.

Patrícia Bernardes: Doutorado em Administração pelo Centro de Pós-Graduação e Pesquisa em Administração da Faculdade de Ciências Econômicas da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). Mestrado em Economia pela UFMG. Economista aposentada. Publicou vários capítulos de livros e artigos em periódicos especializados nacionais e internacionais. Os principais temas de artigos publicados nos últimos dez anos referem-se à: Instituições e Custos de Transação, Políticas Públicas, Desigualdade, Tomada de Decisão e Análise Econômica do Direito.

Petr Iakovlevitch Ekel: Doutorado em Ciências pela Suprema Comissão de Atestados do Conselho de Ministros da URSS. Doutorado em Centrais, Redes e Sistemas Elétricos

pelo Instituto Politécnico de Kiev. Mestrado em Sistemas de Fornecimento de Energia Elétrica pelo Instituto Politécnico de Kiev. Bacharel em Engenharia Elétrica pelo Instituto Politécnico de Kiev. Cientista Sr, Professor Titular e Acadêmico da Academia de Ciências de Engenharia da Ucrânia.

Reinaldo Martinez Palhares: Doutorado em Engenharia Elétrica pela Universidade de Campinas (UNICAMP). Mestrado em Engenharia Elétrica pela UNICAMP. Graduação em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal de Goiás. É Professor Titular na Universidade Federal de Minas Gerais. É Editor Associado no IEEE Transactions on Fuzzy Systems e foi Editor Convidado da Seção Especial em Inteligência Artificial em Sistemas Industriais no IEEE Transactions on Industrial Electronics.

Roberta Oliveira Parreiras Kokshenev: Pós-doutorado em Engenharia Elétrica pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Doutorado em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). Graduação em Engenharia Elétrica pela UFMG. É co-fundadora da empresa Typi, onde hoje atua como consultora.

Willian Felipe Silva Maia: Doutorado em Engenharia Elétrica pelo Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica. Mestrado em Engenharia Elétrica pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC Minas). Graduação em Engenharia Elétrica pela PUC Minas. Atualmente é Engenheiro Eletricista/ Coordenador de Sub- Comissão de investigação de acidentes operacionais do complexo Vargem Grande - Vale S/A, ênfase em investigações de acidentes complexos, incluindo eventos de origem elétrica, incêndio e explosão.

Witold Pedrycz: Recebeu os títulos de M.Sc., Ph.D. e D.Sc. graus da Silesian University of Technology (Polônia). Atualmente é professor do Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação, University of Alberta, Edmonton, AB, Canadá, também do Systems Research Institute, Polish Academy of Sciences, Varsóvia, Polônia, Departamento de Engenharia de Computação, Faculdade de Engenharia e Natural Sciences, Istinye University, Sariyer/Istanbul, Turquia, e também o Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação, Faculdade de Engenharia, King Abdulaziz University, Jeddah, Arábia Saudita. Ele publicou vários artigos nessas áreas; o índice H atual é 127 (Google Scholar)

